# 第2問　2次関数，データの分析

［1］

$f(x)$ を平方完成すると，

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2ax-3a+1$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-4ax)-3a+1$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-2a)^2-4a^2\}-3a+1$$
$$=\frac{1}{2}(x-2a)^2-2a^2-3a+1$$

となるので，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標は

$$\left(\boxed{2}\,a,\quad \boxed{-2}\,a^2-3a+1\right)$$

である．

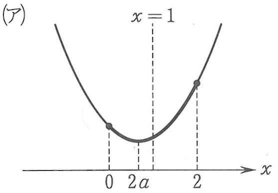
$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 $m$ が $m=-2a^2-3a+1$ となるのは，放物線 $y=f(x)$ の軸 $x=2a$ が区間 $0\leqq x\leqq 2$ に含まれることであるから，

$$0\leqq 2a\leqq 2 \quad より \quad \boxed{0}\leqq a\leqq\boxed{1}$$

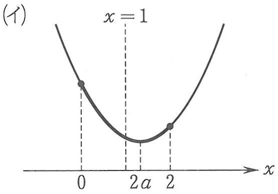
である．

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値 $M$ を求めるため，区間の中央 $x=1$ と軸 $x=2a$ の大小に注意して場合分けする．

(ア)




(イ)




⬅ (ア)のときは，軸が区間の左に寄っているので，$x=2$ のときが最大値となる．

(ア)　$0\leqq 2a<1$ すなわち $0\leqq a<\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ のとき．

$$M=f(2)=\boxed{-7}\,a+\boxed{3}.$$

⬅ $a=\frac{1}{2}$ のときは，$f(0)=f(2)$ となるので，(ア)と(イ)のどちらに含めてもよい．

(イ)　$1\leqq 2a\leqq 2$ すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき．

$$M=f(0)=\boxed{-3}\,a+\boxed{1}.$$

したがって，$0\leqq a\leqq 1$ の範囲において，方程式 $M-m=a+\dfrac{3}{2}$ を解くと以下のようになる．

(ア)　$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき．

$$(-7a+3)-(-2a^2-3a+1)=a+\frac{3}{2}$$

より

$$4a^2-10a+1=0.$$

これを解くと，$a=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{4}$ となるが，$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ より

$$a=\frac{5-\sqrt{21}}{4}.$$

⬅ $4<\sqrt{21}<5$ であるから，

$0<\frac{5-\sqrt{21}}{4}<\frac{1}{4}$，$\frac{9}{4}<\frac{5+\sqrt{21}}{4}<\frac{5}{2}$.

(イ) $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき．

$$(-3a+1)-(-2a^2-3a+1)=a+\frac{3}{2}$$

より

$$4a^2-2a-3=0.$$

これを解くと，$a=\frac{1\pm\sqrt{13}}{4}$ となるが，これは $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ を満たさない．

⬅ $3<\sqrt{13}<4$ であるから，

$-\frac{3}{4}<\frac{1-\sqrt{13}}{4}<-\frac{1}{2}$，$1<\frac{1+\sqrt{13}}{4}<\frac{5}{4}$.

以上より，求める $a$ の値は $a=\frac{\boxed{5}-\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{4}}$.

［2］

(1) $\mathsf{Z}=4$ のとき，$\mathsf{X}\geqq 2$ とすると，$2\leqq \mathsf{X}\leqq \mathsf{Y}\leqq 4$ であるから，

最小値は 2，最大値は 8，範囲(レンジ)は 6

であり適さない．

⬅ **範囲(レンジ)**

(範囲)＝(最大値)－(最小値).

また，$\mathsf{X}\leqq 1$ とすると，$0\leqq \mathsf{X}\leqq \mathsf{Y}\leqq 4$ であるから，

最小値は X，最大値は 8，範囲(レンジ)は $8-\mathsf{X}$

であり，範囲(レンジ)が 7 であることから，

$$8-\mathsf{X}=7$$

$$\mathsf{X}=\boxed{1}$$

である．

さらに，平均値が 4.0 であるから，

$$\frac{2+4+6+8+3+6+4+1+\mathsf{Y}+4}{10}=4.0$$

$$\frac{38+\mathsf{Y}}{10}=4.0$$

であり，

$$\mathsf{Y}=\boxed{2}$$

である．

⬅ $1\leqq \mathsf{Y}\leqq 4$ を満たす．

(2) 上位の 5 個のデータについて考えると，$\mathsf{Z}=8$ のときには 8 がすでに 2 個あることと，第 3 四分位数が 7 であることから，

$$\mathsf{Y}=7$$

である．

⬅ $\underbrace{②③④○○}_{\text{下位のデータ}}\ \underbrace{○○⑦⑧⑧}_{\text{上位のデータ}}$

↑ 第1四分位数　↑ 第3四分位数

下位の 5 個のデータについて考えると，2，3 がすでにあるので，$0\leqq \mathsf{X}\leqq 3$ とすると第 1 四分位数が 4 であることに反する．

よって，

$$4\leqq \mathsf{X}\leqq 7$$

である．

⬅ $\mathsf{Y}=7$.

X＝4 のとき，データを小さい方から順に並べると，

$$2\quad 3\quad 4\quad 4\quad 4\quad 6\quad 6\quad 7\quad 8\quad 8$$

となるから，中央値は 5.0 である．

X＝5 のとき，データを小さい方から順に並べると，

$$2\quad 3\quad 4\quad 4\quad 5\quad 6\quad 6\quad 7\quad 8\quad 8$$

となるから，中央値は 5.5 である．

X＝6 のとき，データを小さい方から順に並べると，

$$2\quad 3\quad 4\quad 4\quad 6\quad 6\quad 6\quad 7\quad 8\quad 8$$

となるから，中央値は 6.0 である．

X＝7 のとき，データを小さい方から順に並べると，

$$2\quad 3\quad 4\quad 4\quad 6\quad 6\quad 7\quad 7\quad 8\quad 8$$

となるから，中央値は 6.0 である．

この 4 つの場合において，確かに第 1 四分位数は 4，第 3 四分位数は 7 となっている．

したがって，Z＝8 とし，第 1 四分位数が 4，第 3 四分位数が 7 のとき，中央値としてあり得ない値は，

$$4.5,\quad 6.5$$

であるから，$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$，$\boxed{④}$ である．

(3) 与えられた表の X，Y，Z 以外のデータは，

2 が 1 個，3 が 1 個，4 が 2 個，6 が 2 個，8 が 1 個

である．

また，与えられた散布図のテスト A のデータにおいて，

2 が 1 個，3 が 2 個，4 が 2 個，6 が 3 個，8 が 2 個

である．

$0 \leqq X \leqq Y \leqq Z \leqq 10$ であるから，

$$(X,\ Y,\ Z) = (\boxed{3},\ \boxed{6},\ \boxed{8})$$

である．

**中央値**

データを値の大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．データの大きさが偶数のときは，中央に並ぶ 2 つの値の平均値を中央値とする．