第1問　数と式，集合と論理，図形と計量

〔1〕

$$\begin{cases} y=2x^2-20x+45 & \cdots ① \\ y=|x-5|-2 & \cdots ② \end{cases}$$

等式 ① を変形すると

$$y=\boxed{2}(x-5)^2-\boxed{5}.$$

したがって，$|x-5|=m$ とおくと

$$y=2m^2-5. \qquad \cdots ①'$$

← A が実数のとき，$|A|^2=A^2$.

また，② より

$$y=m-2. \qquad \cdots ②'$$

①′，②′ より

$$2m^2-5=m-2$$

すなわち

$$\boxed{2}m^2-m-\boxed{3}=0.$$

したがって，

$$(2m-3)(m+1)=0.$$

$m=|x-5|$ は負の数ではないので，$m=\dfrac{3}{2}$ であり，②′ より

$$y=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}.$$

また，$|x-5|=\dfrac{3}{2}$ より

$$x-5=\pm\frac{3}{2} \quad すなわち \quad x=5\pm\frac{3}{2}$$

← k が正の数のとき，$|X|=k \iff X=\pm k$.

となるので，

$$x=\frac{7}{2},\ \frac{13}{2}.$$

以上より，求める実数解は

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{2}},\ \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\right),\ \left(\frac{\boxed{13}}{\boxed{2}},\ \frac{-1}{2}\right).$$

〔2〕

(1)　⓪は，$A\cap B$ が空集合となるから不適である．

①は，$A\cap B=B$ となるから不適である．

②は，$A\cap B=A$ となるから不適である．

すべての条件を満たす A，B の関係を表す図は③である．すなわち $\boxed{ス}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

(2)　(1)より，「$\overline{A}\cap B$ が空集合である」は偽である．すなわち $\boxed{セ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

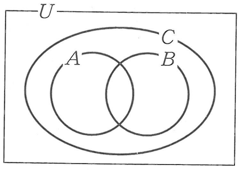
「$k\in A$ ならば $k\in C$」が真であるから，$A\subset C$ である．

さらに，「$k\notin C$ ならば $k\notin B$」が真であり，対偶「$k\in B$ なら

← 命題「$s\Longrightarrow t$」とその対偶「$\overline{t}\Longrightarrow\overline{s}$」の真偽は一致する．

ば$k \in C$」も真であるから，$B \subset C$である．これより，
$(A \cup B) \subset C$であり，これと(1)より，A，B，Cの関係は次のようになる．

(i)



または　(ii) $C = A \cup B$　または　(iii) $C = U$.

よって，「$A \cap \overline{C}$ は空集合である」は真である．すなわち $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

⬅ A と $\overline{C}$ に共通部分はない．

次に，

$$\overline{A \cup \overline{C}} = \overline{A} \cap \overline{\overline{C}} = \overline{A} \cap C$$

であるから，

$$k \notin A \cup \overline{C} \iff k \in \overline{A \cup \overline{C}} \iff k \in \overline{A} \cap C$$

であり，また，

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

である．

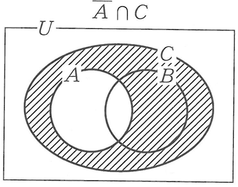
⬅ ド・モルガンの法則

$$\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F},$$
$$\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F}.$$

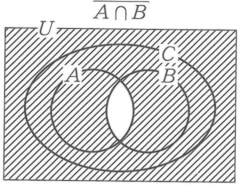
$\overline{\overline{C}} = C$.

(i)のとき．

$\overline{A} \cap C$



$\overline{A \cap B}$



したがって，

$$「k \notin A \cup \overline{C} \Longrightarrow k \in \overline{A} \cup \overline{B}」$$

すなわち

$$「k \in \overline{A} \cap C \Longrightarrow k \in \overline{A \cap B}」$$

は真である．さらに，

$$「k \in \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow k \notin A \cup \overline{C}」$$

すなわち

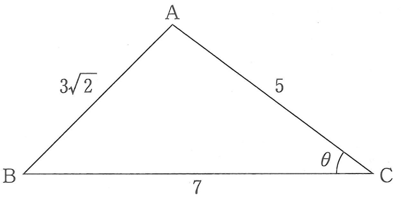
$$「k \in \overline{A \cap B} \Longrightarrow k \in \overline{A} \cap C」$$

は偽である．これらは(ii)，(iii)においても成立する．

ゆえに，$k \notin A \cup \overline{C}$ は $k \in \overline{A} \cup \overline{B}$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない．よって，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

⬅ 命題「$s \Longrightarrow t$」が真のとき，
s は t であるための十分条件，
t は s であるための必要条件
という．

［3］



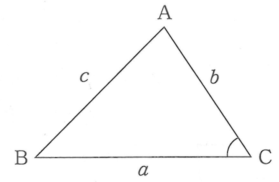
(1)　余弦定理より,

$$\cos\theta=\frac{5^2+7^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{56}{70}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$$

余弦定理

三角形 ABC において,

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$



であり, $\sin\theta>0$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$

である.

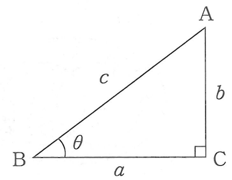
(2)　$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}=\sin\theta$ であるから,

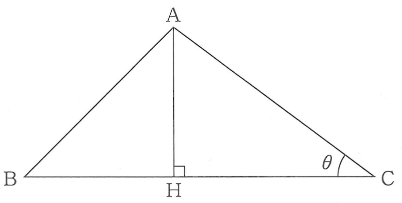
$$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\sin\theta=5\cdot\frac{3}{5}=\boxed{3}.$$

三角比の定義

図の三角形 ABC において,

$$\sin\theta=\frac{b}{c},\quad \cos\theta=\frac{a}{c}.$$

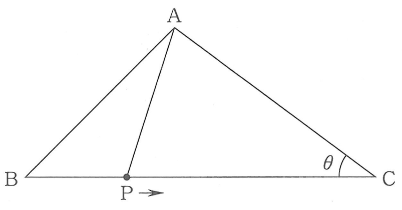




(3)　まず, 点 P が辺 BC (両端を除く) 上にあるとき,

$$3\leqq\mathrm{AP}<5.\qquad\cdots①$$

線分 AP の長さは P が H と一致したとき最小で, $\mathrm{AP}=\mathrm{AH}=3$.
また, $\mathrm{AP}<\mathrm{AC}=5$.



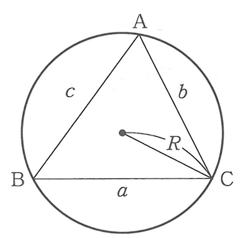
三角形 APC の外接円の半径が R であるから, 正弦定理より

$\dfrac{\mathrm{AP}}{\sin\theta}=2R$ が成り立ち,

正弦定理

三角形 ABC の外接円の半径を R とすると,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$



$$R=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}\mathrm{AP}\qquad\cdots②$$

となる.

① の両辺に $\dfrac{5}{6}$ を掛けると

$$\frac{5}{2}\leqq\frac{5}{6}\mathrm{AP}<\frac{25}{6}$$

となるので，②より

$$\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}} \leqq R < \frac{\boxed{25}}{\boxed{6}}.$$