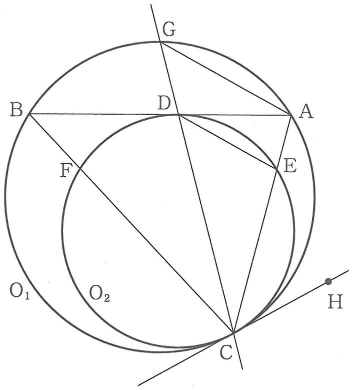
# 第5問　図形の性質

(1)

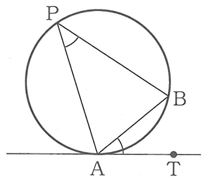



(i)　円 $O_2$ の接線 CH と弦 CE に着目して，接線と弦の作る角と円周角の関係を用いると，

$$\angle EDC = \angle ECH$$

である．

**接線と弦の作る角と円周角の関係**




$\angle BAT = \angle BPA$ （A は接点）．

よって，$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

89 ページの(注)参照．

また，円 $O_1$ の接線 CH と弦 AC に着目して，接線と弦の作る角と円周角の関係を用いると，

$$\angle ACH = \angle AGC$$

すなわち

$$\angle ECH = \angle AGC$$

である．

よって，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

89 ページの(注)参照．

したがって，

$$\angle EDC = \angle AGC$$

であり，同位角が等しいことから，

$$ED \parallel AG$$

である．

(ii)　円 $O_1$ で弧 BG に対する円周角を考えると，

$$\angle BCG = \angle BAG$$

すなわち

$$\angle BCD = \angle BAG$$

である．

よって，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

89 ページの(注)参照．

また，$ED \parallel AG$ より，錯角は等しいから，

$$\angle BAG = \angle ADE$$

である．

よって，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

89 ページの(注)参照．

さらに，円 $O_2$ の接線 AB と弦 DE に着目して，接線と弦の作る角と円周角の関係を用いると，

$$\angle ADE = \angle DCE$$

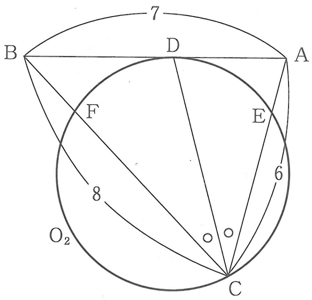
であるから，

$$\angle BCD = \angle DCE$$

であり，

直線 CD は $\angle ACB$ の二等分線である．　…①

(2)




①より，

$$\begin{aligned} AD:DB &= CA:CB \\ &= 6:8 \\ &= 3:4 \end{aligned}$$

である．

よって，

$$\begin{aligned} AD &= \frac{3}{3+4}AB \\ &= \frac{3}{7}\cdot 7 \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

である．

また，円 $O_2$ と 2 直線 AC，AD に方べきの定理を用いると，

$$\begin{aligned} AE\cdot AC &= AD^2 \\ AE\cdot 6 &= 3^2 \\ AE &= \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \end{aligned}$$

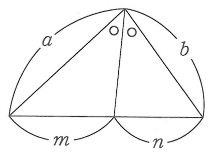
である．

(3)　BD : DA = 4 : 3 より，

$$\begin{aligned} BD &= \frac{4}{4+3}BA \\ &= \frac{4}{7}\cdot 7 \\ &= 4 \end{aligned}$$

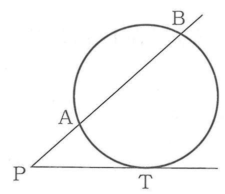
であり，円 $O_2$ と 2 直線 BC，BD に方べきの定理を用いると，

**角の二等分線の性質**




$m : n = a : b.$

**方べきの定理**




$PA\cdot PB = PT^2$（T は接点）．

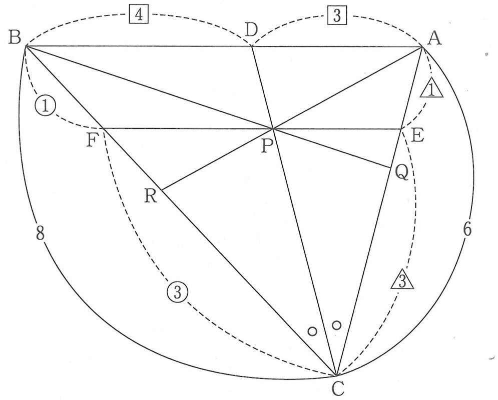
$$BF \cdot BC = BD^2$$
$$BF \cdot 8 = 4^2$$
$$BF = 2$$

である．

よって，$CF = 8 - 2 = 6$ であり，

$$CF : FB = 6 : 2 = 3 : 1$$

である．




また，

$$CE = CA - AE = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

であり，① より，△CEF において，直線 CP は ∠ECF の二等分線であるから，

$$EP : PF = CE : CF = \frac{9}{2} : 6 = 3 : 4$$

である．

よって，△CEF と直線 BQ にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{EQ}{QC} \cdot \frac{CB}{BF} \cdot \frac{FP}{PE} = 1$$
$$\frac{EQ}{QC} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

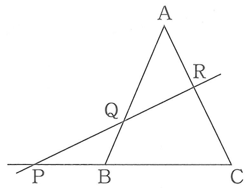
すなわち

$$\frac{EQ}{QC} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{16}}$$

である．

$$\begin{cases} AE : EC = 1 : 3, \\ EQ : QC = 3 : 16 \end{cases}$$

**メネラウスの定理**

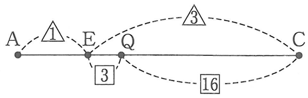



$$\frac{AR}{RC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QA} = 1.$$

$AE = \frac{3}{2}$，$EC = \frac{9}{2}$.

より，

$$\begin{aligned} AQ &= AE + EQ \\ &= \frac{1}{3}CE + \frac{3}{19}CE \\ &= \frac{28}{57}CE \\ &= \frac{28}{57}\cdot\frac{19}{16}CQ \\ &= \frac{7}{12}CQ \end{aligned}$$




であるから，

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{12}{7}$$

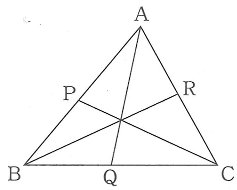
である．

よって，△ABC にチェバの定理を用いると，

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{12}{7} = 1$$

チェバの定理




$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = 1.$$

すなわち

$$\frac{BR}{RC} = \frac{7}{9}$$

であり，

$$\begin{aligned} CR &= \frac{9}{7+9}BC \\ &= \frac{9}{16}\cdot 8 \\ &= \frac{\boxed{9}}{\boxed{2}} \end{aligned}$$

である．

**【CR を求める別解】**

AB // EF より，

$$\begin{aligned} CP:PD &= CE:EA \\ &= 3:1 \end{aligned}$$

AE:EC = 1:3，BF:FC = 1:3 より，AB // EF.

であるから，△BCD と直線 AR にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DA}{AB} = 1$$

$$\frac{BR}{RC}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{7} = 1$$

すなわち

$$\frac{BR}{RC} = \frac{7}{9}$$

であり，

$$CR = \frac{9}{7+9}BC = \frac{9}{2}$$

である.

(CR を求める別解終り)

**($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$ についての注)**

$$AD:DB=3:4,$$
$$AE:EC=1:3$$

より,

$$BC \not\parallel DE$$

であるから,

$$\angle EDC \neq \angle BCD$$

である.

これと $\angle BCD=\angle DCE$ より,

$$\angle EDC \neq \angle DCE$$

であるから, $\boxed{ア}$ に①は不適である.

また, 円 $O_1$ の接線 CH と弦 CG に着目して, 接線と弦の作る角と円周角の関係を用いると,

$$\angle GCH=\angle GBC$$

であり, これと $\angle GCH>\angle ECH$ より,

$$\angle GBC>\angle ECH$$

であるから, $\boxed{イ}$ に⓪は不適である.

また, △BCD において, 2つの内角の和は残りの内角の外角と等しいから,

$$\angle BCD+\angle CBD=\angle BDG$$

より,

$$\angle BDG>\angle BCD$$

であるから, $\boxed{ウ}$ に⓪は不適である.

また,

$$ED \parallel AG \quad かつ \quad ED \not\parallel BE$$

より,

$$AG \not\parallel BE$$

である.

よって,

$$\angle BAG \neq \angle ABE$$

であるから, $\boxed{エ}$ に①は不適である.

($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$ についての注終り)