第4問　整数の性質

(1)
$$a^2=4b-\frac{6}{c}+2. \quad \cdots ①$$

(i)　$c=1$ のとき，①は，
$$a^2=4b-4$$
すなわち
$$a^2=4(b-1) \quad \cdots ②$$
であるから，a^2 は偶数であり，a も偶数である．

よって，自然数 ℓ を用いて $a=2\ell$ とおくと，②より，
$$(2\ell)^2=4(b-1)$$
すなわち
$$b=\ell^2+\boxed{1}$$
である．

$a+b<10000$ のとき，$a=2\ell$ と $b=\ell^2+1$ を代入して，
$$2\ell+(\ell^2+1)<10000$$
$$(\ell+1)^2<100^2$$
であり，$\ell+1>1$ であるから，
$$1<\ell+1<100$$
$$0<\ell<99$$
である．

← ℓ は自然数．

よって，$a+b<10000$ を満たす自然数 ℓ は，
$$\ell=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 97,\ 98$$
の 98 個あり，ℓ の個数と $(a,\ b)$ の個数は一致するから，

← $(a,\ b)=(2\ell,\ \ell^2+1)$．

$a+b<10000$ を満たす $(a,\ b)$ は全部で $\boxed{98}$ 組ある．

(ii)　任意の整数 N は，
$$N=2k \quad \text{または} \quad N=2k+1 \quad (k\text{ は整数})$$
と表すことができ，
$$N^2=4k^2 \quad \text{または} \quad N^2=4(k^2+k)+1$$
となるから，整数の平方を 4 で割ったときの余りは $\boxed{0}$ または $\boxed{1}$ である．

①より，$\dfrac{6}{c}$ は整数であるから，c は 6 の正の約数であり，
$$c=1,\ 2,\ 3,\ 6$$
である．

$c=2$ のとき，①は，
$$a^2=4b-1=4(b-1)+3$$
であり，a^2 を 4 で割ったときの余りが 3 となるから不適である．

← a^2 を 4 で割ったときの余りは 0 または 1 である．

$c=3$ のとき，①は，
$$a^2=4b$$

であり，a^2 を 4 で割ったときの余りが 0 となるから適する．

　$c=6$ のとき，① は，

$$a^2=4b+1$$

であり，a^2 を 4 で割ったときの余りが 1 となるから適する．

　したがって，① を満たす c のとり得る値は 1 以外に $\boxed{3}$ と $\boxed{6}$ がある．

(iii)(ア)　$c=1$ のとき，(i) より，

$$a=2\ell,\quad b=\ell^2+1$$

である．

　よって，① を満たす $(a,\ b,\ c)$ のうち，b が 1 桁であるのは，

$$\ell=1,\ 2$$

のときであり，ℓ の個数と $(a,\ b,\ c)$ の個数は一致するから，$(a,\ b,\ c)$ は 2 組ある．

(イ)　$c=3$ のとき，① より，

$$a^2=4b \qquad \cdots ③$$

であるから，a^2 は偶数であり，a も偶数である．

　自然数 m を用いて $a=2m$ とおくと，③ より，

$$(2m)^2=4b$$

であり，

$$b=m^2$$

である．

　よって，① を満たす $(a,\ b,\ c)$ のうち，b が 1 桁であるのは，

$$m=1,\ 2,\ 3$$

のときであり，m の個数と $(a,\ b,\ c)$ の個数は一致するから，$(a,\ b,\ c)$ は 3 組ある．

(ウ)　$c=6$ のとき，① より，

$$a^2=4b+1 \qquad \cdots ④$$

であるから，a^2 は 5 以上の奇数であり，a は 3 以上の奇数である．

　自然数 n を用いて $a=2n+1$ とおくと，④ より，

$$(2n+1)^2=4b+1$$

であり，

$$b=n^2+n$$

である．

　よって，① を満たす $(a,\ b,\ c)$ のうち，b が 1 桁であるのは，

$$n=1,\ 2$$

のときであり，n の個数と $(a,\ b,\ c)$ の個数は一致するから，

⬅ 例えば，$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のような自然数 a，b が存在する．

⬅ 例えば，$(a,\ b)=(3,\ 2)$ のような自然数 a，b が存在する．

⬅ $c=1$ のとき，例えば，$(a,\ b)=(2,\ 2)$ のような自然数 a，b が存在する．

⬅ $1\leqq \ell^2+1\leqq 9$.

⬅ $1\leqq m^2\leqq 9$.

⬅ $b\geqq 1$.

⬅ $1\leqq n^2+n\leqq 9$.

$(a,\ b,\ c)$ は2組ある．

以上より，① を満たす $(a,\ b,\ c)$ のうち，b が1桁であるものは全部で $\boxed{7}$ 組ある．

← $c=1$ のとき，2組，
$c=3$ のとき，3組，
$c=6$ のとき，2組．

(2)(i) 7進法で $1000_{(7)}$ と表される数を10進法で表すと，

$$1000_{(7)}=7^3=\boxed{343}$$

である．

7進法で $6666_{(7)}$ と表される数を10進法で表すと，

$$\begin{aligned}6666_{(7)}&=10000_{(7)}-1_{(7)}\\&=7^4-1\\&=\boxed{2400}\end{aligned}$$

である．

← 直接
$$\begin{aligned}6666_{(7)}&=6\cdot7^3+6\cdot7^2+6\cdot7^1+6\\&=2400\end{aligned}$$
としてもよい．

(ii)
$$B=\{1000,\ 1001,\ \cdots,\ 6666\}.$$

1桁から4桁までの自然数全体の集合から7，8，9が使われている要素を除いてできる集合を C とすると，

$$C=\{1,\ \cdots,\ 6,\ 10,\ 11,\ \cdots,\ 66,\ 100,\ 101,\ \cdots,\ 666,\ 1000,\ 1001,\ \cdots,\ 6666\}$$

である．

B の要素のうち大きい方から1000番目のものは，C の要素のうち大きい方から1000番目のものと一致するから，C の要素のうち大きい方から1000番目のものを考える．

ここで，(i)より $6666_{(7)}=2400$ であることを利用すると，

C の要素のうち最大の数 (6666) は，
小さい方から2400番目

であるから，

C の要素のうち大きい方から1000番目のものは，
小さい方から1401番目

である．

← $2400-1000+1=1401$(番目)．

$$\begin{aligned}1401&=4\cdot7^3+4\cdot7+1\\&=4041_{(7)}\end{aligned}$$

であることを利用すると，C の要素のうち大きい方から1000番目のものは，

$$4041$$

であり，B の要素のうち大きい方から1000番目のものも，

$$\boxed{4041}$$

である．

←
```
7)1401
7) 200…1
7)  28…4
7)   4…0
     0…4
```

(注) 集合 B の要素は，7進法で表される4桁の整数から

$$3140_{(7)}\longrightarrow3140$$

のように添字を除いたものである．

7 進法で表される 4 桁の整数のうち，大きい方から 1000 番目のものは，

$$6666_{(7)}-2626_{(7)}+1_{(7)}=4041_{(7)}$$

であり，このように (ii) を考えてもよい．

7) 1000
7) 142…6
7) 20…2
7) 2…6
0…2