第3問　場合の数・確率

(1)　7枚の異なるカードが入った袋の中から4枚のカードを取り出し，横一列に並べるとき，並べ方は全部で，

$${}_7P_4=\boxed{840}\ (通り) \quad \cdots ①$$

ある．

このうち，数字1と数字2が書かれたカードだけが並べられているものは，

$${}_5P_4=\boxed{120}\ (通り) \quad \cdots ②$$

← 赤1，青1，青2，黄1，黄2 のうちから4枚を選んで横一列に並べる．

であり，数字1と数字3が書かれたカードだけが並べられているものは，

$$4!=\boxed{24}\ (通り) \quad \cdots ③$$

← 赤1，青1，黄1，黄3 を横一列に並べる．

である．

同様に，数字1と☆印が書かれたカードだけが並べられているものは，

$$4!=24\ (通り) \quad \cdots ④$$

← 赤1，青1，黄1，☆ を横一列に並べる．

である．

また，数字1と数字3と☆印が書かれたちょうど3種類のカードが並べられているものは，

$${}_3C_2\cdot 4!=\boxed{72}\ (通り)$$

← 赤1，青1，黄1のうちから2枚を選び，その2枚と黄3，☆の合計4枚を並べる．

であり，このうち，☆印が書かれたカードが数字3が書かれたカードより左にあるものは，

$$\frac{72}{2}=36\ (通り) \quad \cdots ⑤$$

← 「☆が黄3より左にあるもの」と「☆が黄3より右にあるもの」は同数である．

である．

(2)　4回の試行におけるカードの取り出し方は，①より，840通りであり，これらは同様に確からしい．

$X=3$ となるのは，4回の試行後，机の上に数字3が書かれた球が1個だけ残っているときである．つまり，4回の試行において，数字3と☆印が書かれたカードをどちらも取り出すことなく，数字1と数字2が書かれたカードだけを取り出せばよい．このようなカードの取り出し方は，②より，120通りであるから，$X=3$ となる確率は，

← 4回の試行において，数字3または☆印が書かれたカードを取り出すと，数字3が書かれた球は取り除かれてしまう．

$$\frac{120}{840}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{7}} \quad \cdots ⑥$$

である．

次に，$X=2$ となる確率を，4回の試行において，☆印が書かれたカードが取り出されるときと取り出されないときに場合分けをして求める．

(i) ☆印が書かれたカードが取り出されるとき．

$X=2$ となるのは，次の (a)，(b) の場合である．

(a) 数字 1 と☆印が書かれたカードだけを取り出す．

(b) ☆印が書かれたカードを取り出した後に数字 3 が書かれたカードを取り出し，残りは数字 1 が書かれたカードを取り出す．

(a) の場合の確率は，④ より，

$$\frac{24}{840}$$

であり，(b) の場合の確率は，⑤ より，

$$\frac{36}{840}$$

である．

これらの確率を加えると，

$$\frac{24}{840}+\frac{36}{840}=\frac{60}{840} \quad \cdots ⑦$$

である．

(ii) ☆印が書かれたカードが取り出されないとき．

$X=2$ となるのは，数字 1 と数字 3 が書かれたカードだけを取り出す場合であり，その確率は，③ より，

$$\frac{24}{840}$$

である．

(i)，(ii) より，$X=2$ となる確率は，

$$\frac{60}{840}+\frac{24}{840}=\frac{84}{840}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{10}} \quad \cdots ⑧$$

である．

$X=1$ となるとき，☆印が書かれたカードが必ず取り出される．$X=1$ となる確率を，4 回の試行において，☆印が書かれたカードが何回目に取り出されるかで場合分けをして求める．

(ア) 1 回目の試行で☆印が書かれたカードが取り出されるとき．

2 回目から 4 回目の試行では，数字 2 と数字 3 が書かれたカードだけを取り出せばよいから，確率は，

$$\frac{3!}{840}=\frac{6}{840}$$

である．

(イ) 2 回目の試行で☆印が書かれたカードが取り出されるとき．

1 回目，3 回目，4 回目の試行では，数字 2 と数字 3 が書かれたカードだけを取り出せばよいから，確率は，

← 数字 1 と数字 3 が書かれた球が取り除かれる．

← 数字 3 が書かれたカードを，☆印が書かれたカードより先に取り出すと，☆印が書かれたカードを取り出したときに，数字 2 が書かれた球は取り除かれてしまう．

← ☆印が書かれたカードが取り出されないとき，必ず数字 1 が書かれたカードを取り出すから，数字 1 が書かれた球は取り除かれてしまう．

$$\frac{3!}{840}=\frac{6}{840}$$

である．

(ウ) 3回目の試行で☆印が書かれたカードが取り出されるとき．

1回目，2回目の試行では，数字2が書かれたカードだけを取り出し，4回目の試行では，数字3が書かれたカードを取り出せばよいから，確率は，

$$\frac{2!}{840}=\frac{2}{840}$$

である．

(エ) 4回目の試行で☆印が書かれたカードが取り出されるとき．

$X=1$ となることはない．

(ア)，(イ)，(ウ)，(エ)より，$X=1$ となる確率は，

$$\frac{6}{840}+\frac{6}{840}+\frac{2}{840}=\frac{14}{840} \qquad \cdots ⑨$$

である．

⑥，⑧，⑨より，$X \neq 0$ となる確率は，

$$\frac{120}{840}+\frac{84}{840}+\frac{14}{840}=\frac{218}{840}$$

である．

また，⑦，⑨より，$X \neq 0$ かつ☆印が書かれたカードが取り出される確率は，

$$\frac{60}{840}+\frac{14}{840}=\frac{74}{840}$$

である．

以上より，$X \neq 0$ であったとき，☆印が書かれたカードを取り出している条件付き確率は，

$$\frac{\frac{74}{840}}{\frac{218}{840}}=\frac{\boxed{37}}{\boxed{109}}$$

である．

← 1回目，2回目の試行で数字2と数字3が書かれたカードを取り出したとき，3回目の試行で数字1が書かれた球が取り除かれてしまう．

← 1回目，2回目，3回目のカードの取り出し方によらず，数字1が書かれた球が取り除かれてしまう．

← **条件付き確率**

事象 A が起こったという条件の下で，事象 B が起こる条件付き確率 $P_A(B)$ は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$