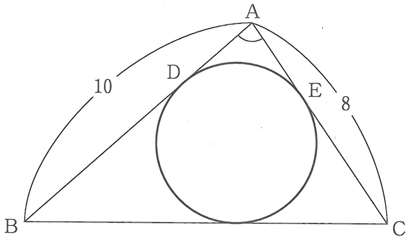
第2問　図形と計量，データの分析

〔1〕



$\triangle$ABC に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned} BC^2 &= CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB\cos\angle BAC \\ &= 8^2 + 10^2 - 2\cdot 8\cdot 10\cdot \frac{1}{8} \\ &= 144 \end{aligned}$$

であり，BC > 0 であるから，

$$BC = \boxed{12}$$

である．

$$\begin{aligned} \sin\angle BAC &= \sqrt{1-\cos^2\angle BAC} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} \\ &= \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{8}} \end{aligned}$$

である．

また，

$$\begin{aligned} (\triangle ABC\text{の面積}) &= \frac{1}{2}CA \cdot AB\sin\angle BAC \\ &= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ &= \boxed{15}\sqrt{\boxed{7}} \end{aligned}$$

である．

円 I の半径を r とすると，

$$(\triangle ABC\text{の面積}) = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$$

が成り立つから，

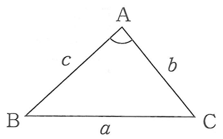
$$15\sqrt{7} = \frac{1}{2}r(10+12+8)$$

すなわち

$$r = \sqrt{\boxed{7}}$$

である．

余弦定理

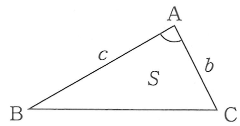


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，

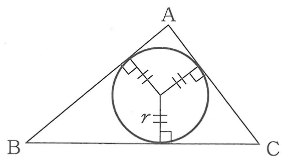
$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

三角形の面積



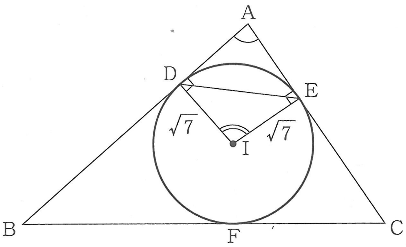
$$S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

三角形の内接円の半径



$\triangle$ABC の内接円の半径を r とすると，

$$(\triangle ABC\text{の面積}) = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA).$$



円 I と辺 BC の接点を F とする．

$$\cos\angle\mathrm{DIE}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{DAE})$$
$$=-\cos\angle\mathrm{DAE}$$
$$=-\frac{1}{8}$$

⬅ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.$

⬅ $\cos\angle\mathrm{DAE}=\cos\angle\mathrm{BAC}$
$=\frac{1}{8}.$

であり，△IDE に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{DE}^2=\mathrm{ID}^2+\mathrm{IE}^2-2\mathrm{ID}\cdot\mathrm{IE}\cos\angle\mathrm{DIE}$$
$$=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)$$
$$=\frac{63}{4}$$

であるから，DE＞0 より，

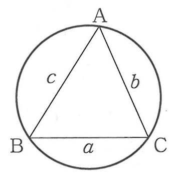
$$\mathrm{DE}=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

である．

△DEP の外接円の半径を R とし，△DEP に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{DE}}{\sin\angle\mathrm{DPE}}=2R$$

⬅ **正弦定理**



△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

であるから，

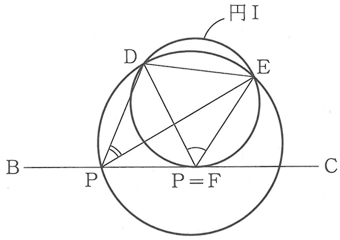
$$\sin\angle\mathrm{DPE}=\frac{\mathrm{DE}}{2R}$$

である．

線分 DE の長さは一定であるから，

$\sin\angle\mathrm{DPE}$ が最大
$\iff$ R が最小
$\iff$ P が F と一致
$\iff$ △DEP の外接円が円 I と一致
$\iff$ $R=r$

⬅



であるから，$\sin\angle\mathrm{DPE}$ が最大となるとき，

$$\sin\angle\mathrm{DPE}=\frac{\mathrm{DE}}{2R}$$
$$=\frac{\mathrm{DE}}{2r}$$
$$=\frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}}{2\sqrt{7}}$$

$$= \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

である．

〔2〕

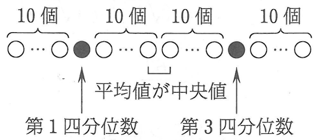
42人の通学時間を値の小さい方から順に t_1，t_2，t_3，…，t_{42} とする．

表から，

$$t_1 = 5,\quad t_{11} = 7,\quad \frac{t_{21} + t_{22}}{2} = 9,\quad t_{32} = 14,\quad t_{42} = 21$$

である．

42人のデータであるから，データの値を小さい方から順に並べたとき，第1四分位数は11番目，第3四分位数は32番目の値であり，中央値は21番目と22番目の値の平均値である．



範囲は $21 - 5 = 16$（分）であるから，⓪は正しい．

範囲（レンジ）

（範囲）＝（最大値）−（最小値）．

$t_{21} \geqq t_{11} = 7$ と $\dfrac{t_{21} + t_{22}}{2} = 9$ より，

$$t_{22} = 2 \cdot 9 - t_{21} \leqq 18 - 7 = 11$$

である．したがって，少なくとも22人の生徒は通学時間が12分未満であるから，①は正しくない．

$t_{32} = 14$ であるから，通学に13分以上かかる生徒は少なくとも11人である．

よって，②は正しくなく，③は正しい．

$\dfrac{t_{21} + t_{22}}{2} = 9$，$t_{21} \leqq t_{22}$ より，

$$\frac{t_{21} + t_{21}}{2} \leqq 9 \quad すなわち \quad t_{21} \leqq 9$$

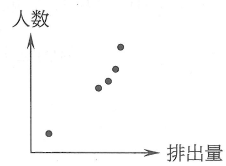
であるから，少なくとも21人は通学時間が9分以下である．したがって，平均値10.7分より通学に時間のかかる生徒は多くとも21人であり，④は正しくない．

以上より，$\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ と $\boxed{③}$ である．

〔3〕

(1) 散布図1より，ゴミを排出した人数の多い方からの都道府県の2位と3位は，それぞれゴミの排出量の多い方からの都道府県の3位と2位であり，順位は一致しない．よって，⓪は正しくない．

散布図1より，ゴミを排出した人数の少ない方からの5都道府県の順位とゴミの排出量の少ない方からの5都道府県の順位は一致しているから，①は正しい．



人数の増加とともに排出量も増加している．

ゴミを排出した人数の少ない方からの4都道府県は，散布図1よりゴミの排出量の少ない方からの4都道府県であるから，散布図2の横軸の値の小さい方から4つの都道府県である．そのリサイクル率は15.0%と25.0%の間にあるから，②は正しく，③は正

しくない．

以上より，$\boxed{チ}$，$\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ と $\boxed{②}$ である．

(2)(i) ゴミのリサイクル率とゴミの排出量の相関係数を r とすると，

$$r=\frac{-162.34}{3.87\times 53.06}=-0.790\cdots$$

であるから，$\boxed{テ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(ii) 2015年のゴミの排出量の少ない方からの10都道府県のゴミの排出量を x_1，x_2，…，x_{10} (t) とし，平均値を $\overline{x}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}$$

であり，翌年のゴミの排出量の平均値を $\overline{x'}$ とすると，

$$\begin{aligned}\overline{x'}&=\frac{(x_1-10000)+(x_2-10000)+\cdots+(x_{10}-10000)}{10}\\&=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}-10000\\&=\overline{x}-10000\end{aligned}$$

である．

よって，2015年の偏差

$$x_k-\overline{x}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

と翌年の偏差

$$\begin{aligned}(x_k-10000)-\overline{x'}&=(x_k-10000)-(\overline{x}-10000)\\&=x_k-\overline{x}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)\end{aligned}$$

は等しいから，2015年と翌年におけるゴミの排出量の標準偏差およびゴミのリサイクル率とゴミの排出量の共分散はともに変化しない．

したがって，ゴミのリサイクル率とゴミの排出量の相関係数も変化しない．

以上より，$\boxed{ト}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

相関係数

2つの変量 x，y の
共分散を s_{xy}，
x の標準偏差を s_x，
y の標準偏差を s_y
とするとき，x と y の相関係数 r は，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}.$$

偏差・分散・標準偏差

変量 x についてのデータの値を x_1，x_2，…，x_n とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差という．さらに，偏差の2乗の平均値を x の分散といい，分散の正の平方根を標準偏差という．