第1問　数と式，集合と命題，２次関数

［1］

$$|x-2|^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})|x-2|-\sqrt{6}=0. \quad \cdots ①$$

(1)
$$t^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})t-\sqrt{6}=t^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})t-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$$
$$=\left(t+\sqrt{\boxed{2}}\right)\left(t-\sqrt{\boxed{3}}\right)$$

である．

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & \sqrt{2} & \longrightarrow & \sqrt{2} \\ 1 & & -\sqrt{3} & \longrightarrow & -\sqrt{3} \\ \hline & & & & -(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{array}$$

(2) $|x-2|=t$ とおくと，①は，
$$t^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})t-\sqrt{6}=0$$
となり，(1)より，
$$(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{3})=0$$
$$t=-\sqrt{2},\ \sqrt{3}$$
である．

$t\geqq 0$ より，

$|X|\geqq 0.$

$$t=\sqrt{3}$$
であるから，
$$|x-2|=\sqrt{3}$$
すなわち
$$x-2=\pm\sqrt{3}$$

aが正の定数のとき，
$|X|=a \iff X=\pm a.$

である．

よって，
$$x=2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$$
となるから，
$$\alpha=2+\sqrt{3}$$
である．

これより，
$$\begin{aligned}\beta&=\alpha-\frac{1}{\alpha}\\ &=2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\\ &=2+\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\ &=2+\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}\\ &=\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}\end{aligned}$$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

である．

$9<12<16$ より，
$$\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$$
すなわち

$$3 < 2\sqrt{3} < 4$$

であるから，$m \leqq \beta < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{3}$ である．

［2］

次の3つの命題はすべて真である．

① $p_1 \Longrightarrow p_4$

② $\overline{p_1} \Longrightarrow \overline{p_5}$

③ 「$p_2 \Longrightarrow p_1$」または「$p_3 \Longrightarrow p_5$」

(1) 命題②の対偶は，

$$\overline{\overline{p_5}} \Longrightarrow \overline{\overline{p_1}}$$

すなわち

$$p_5 \Longrightarrow p_1 \qquad \cdots ④$$

である．よって，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

← $s \Longrightarrow t$ の対偶は，$\overline{t} \Longrightarrow \overline{s}$ である．

← 条件 $\overline{p}$ の否定は，$\overline{\overline{p}}$ すなわち p である．

(2) 命題A:「$p_5 \Longrightarrow p_4$」の真偽を調べる．

命題②は真であるから，その対偶④も真である．

よって，命題①，④はともに真より，

$$「p_5 \Longrightarrow p_1」\ かつ\ 「p_1 \Longrightarrow p_4」$$

すなわち

$$「p_5 \Longrightarrow p_4」 \qquad \cdots ⑤$$

が成り立つから，Aは真である．

次に，命題B:「$p_4 \Longrightarrow$ (p_1 または p_4)」の真偽を調べる．

「$p_4 \Longrightarrow p_4$」が成り立つから，Bは真である．

したがって，A，Bはともに真であるから，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

← 命題とその対偶の真偽は一致する．

← 条件 p_i を満たすものの集合を P_i とすると，$p_5 \Longrightarrow p_1$ かつ $p_1 \Longrightarrow p_4$ より，

$P_5 \subset P_1$ かつ $P_1 \subset P_4$

となるから，

$P_5 \subset P_4$

であり，

$p_5 \Longrightarrow p_4$

である．

(3) 命題⑤が真であるから，p_4 と p_5 が同値になるのは，

$$「p_4 \Longrightarrow p_5」が真 \qquad \cdots (*)$$

のときである．

⓪ 『「$\overline{p_5} \Longrightarrow \overline{p_1}$」が偽』かつ『「$p_4 \Longrightarrow p_1$」が真』のときについて調べる．

「$\overline{p_5} \Longrightarrow \overline{p_1}$」が偽であるから，

$$対偶である「p_1 \Longrightarrow p_5」も偽 \qquad \cdots ⑥$$

である．

また，命題①が真であることと「$p_4 \Longrightarrow p_1$」が真であることから，p_1 と p_4 は同値である．

よって，「$p_4 \Longrightarrow p_5$」と「$p_1 \Longrightarrow p_5$」の真偽は一致し，⑥より，

$$「p_4 \Longrightarrow p_5」は偽$$

である．

ゆえに，(*)が成り立たないから，⓪のとき，p_4 と p_5 は同値にならない．

① 『「$\overline{p_5} \Longrightarrow \overline{p_3}$」が偽』かつ『「$p_4 \Longrightarrow p_3$」が真』のときについて調べる．

「$\overline{p_5} \Longrightarrow \overline{p_3}$」が偽であるから，

対偶である「$p_3 \Longrightarrow p_5$」も偽　　…⑦

である．

また，

「$p_4 \Longrightarrow p_3$」は真　　…⑧

である．

⑦と命題③が真であることより，

「$p_2 \Longrightarrow p_1$」は真　　…⑨

である．

命題①，②，③と①(すなわち①，④，⑦，⑧，⑨)から，示せることは

『「$p_2 \Longrightarrow p_1 \Longrightarrow p_4 \Longrightarrow p_3$」が真』

と

『「$p_5 \Longrightarrow p_1 \Longrightarrow p_4 \Longrightarrow p_3$」が真』

の２つであり，(*)を示すことはできない．

よって①のとき，p_4 と p_5 が同値であるかどうかは確定できず，①は不適である．

② 『「$\overline{p_1} \Longrightarrow \overline{p_2}$」が偽』かつ『「$p_4 \Longrightarrow p_3$」が真』のときについて調べる．

「$\overline{p_1} \Longrightarrow \overline{p_2}$」が偽であるから，

対偶である「$p_2 \Longrightarrow p_1$」も偽　　…⑩

である．

命題③が真であることと⑩より，命題③においては，

「$p_3 \Longrightarrow p_5$」のみが真

である．

このことと「$p_4 \Longrightarrow p_3$」が真であることから，

「$p_4 \Longrightarrow p_3$」　かつ　「$p_3 \Longrightarrow p_5$」

すなわち

「$p_4 \Longrightarrow p_5$」は真

であり，(*)が成り立つ．よって，②のとき，p_4 と p_5 は同値になる．

したがって，$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

［３］

$f(x) = -x^2 + 4ax - 4a^2 - 2a + 2$ とおく．

$$f(x) = -(x-2a)^2 - 2a + 2$$

より，G_1 の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}\,a,\ \boxed{-2}\,a + \boxed{2}\right)$$

である．

⬅ 2 次関数 $y = p(x-q)^2 + r$ のグラフの頂点の座標は，

$$(q,\ r).$$

(1) G_1 の軸は直線 $x = 2a$ であり，G_2 は G_1 を x 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフであるから，G_2 の軸は直線 $x = 2a-1$ である．

したがって，G_2 が y 軸に関して対称となるのは，

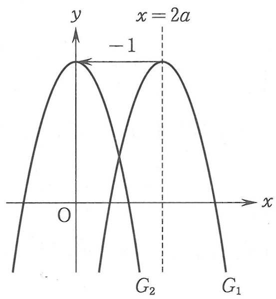
$$2a - 1 = 0$$

より，

$$a = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

のときである．

⬅



このとき，$f(x) = -x^2 + 2x$ であり，$f(x) > 0$ は，

$$-x^2 + 2x > 0$$

$$x(x-2) < 0$$

となるから，この不等式の解は，

$$\boxed{0} < x < \boxed{2}$$

である．

(2) x の 2 次不等式 $f(x) > 0$ が 1 を解にもち，-1 を解にもたないのは，

$$「f(1) > 0 \text{ かつ } f(-1) \leqq 0」 \quad \cdots ①$$

が成り立つときである．

⬅ 不等式 $f(x) > 0$ が実数 α を解にもたないということは，

$$f(\alpha) > 0 \text{ でない}$$

すなわち

$$f(\alpha) \leqq 0$$

ということである．

$f(1) > 0$ は，

$$-1^2 + 4a\cdot 1 - 4a^2 - 2a + 2 > 0$$

$$4a^2 - 2a - 1 < 0$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{4} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

となり，$f(-1) \leqq 0$ は，

$$-(-1)^2 + 4a\cdot(-1) - 4a^2 - 2a + 2 \leqq 0$$

$$4a^2 + 6a - 1 \geqq 0$$

$$a \leqq \frac{-3-\sqrt{13}}{4}, \quad \frac{-3+\sqrt{13}}{4} \leqq a$$

となる．

ここで，$2 < \sqrt{5} < 3$，$3 < \sqrt{13} < 4$ より，

$$-\frac{1}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < -\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1,$$

$$-\frac{7}{4} < \frac{-3-\sqrt{13}}{4} < -\frac{3}{2}, \quad 0 < \frac{-3+\sqrt{13}}{4} < \frac{1}{4}$$

であるから，

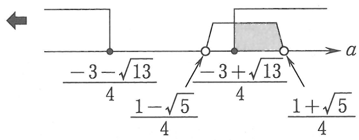
$$\frac{-3-\sqrt{13}}{4}<\frac{1-\sqrt{5}}{4}<\frac{-3+\sqrt{13}}{4}<\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

である．

ゆえに，① を満たす a の値の範囲は，

$$\frac{-3+\sqrt{13}}{4}\leqq a<\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

であり，



$\boxed{チ}$ に当てはまるものは $\boxed{⑦}$，

$\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$，

$\boxed{テ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$，

$\boxed{ト}$ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$

である．