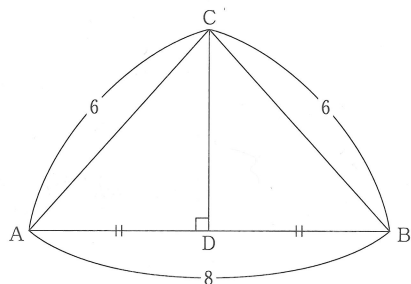


## 第5問 図形の性質



$\triangle ABC$  は  $CA=CB$  の二等辺三角形で、 $D$  は辺  $AB$  の中点であるから、

$$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4,$$

$$\angle ADC = 90^\circ$$

である.

よって、直角三角形 ACD に三平方の定理を用いると、

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{CA^2 - AD^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 4^2} \\ &= \boxed{2} \sqrt{\boxed{5}} \end{aligned}$$

であり,

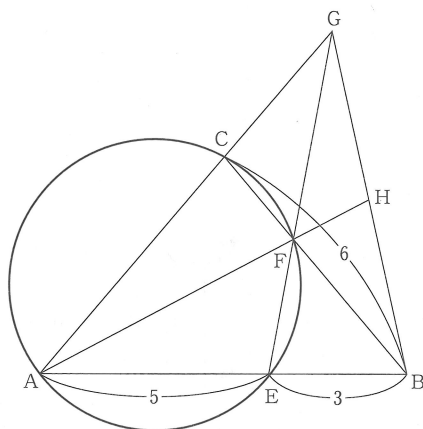
$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$= \boxed{8} \sqrt{\boxed{5}}$$

... ①

である.

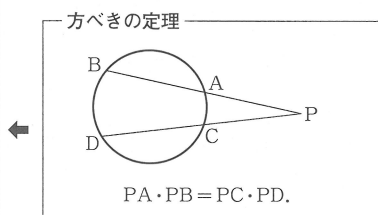


方べきの定理を用いると,

$$BF \cdot BC = BE \cdot BA$$

$$\text{BF} \cdot 6 = 3 \cdot 8$$

BF = 4



であり、 $\triangle ABC$  と直線  $EG$  にメネラウスの定理を用いると、

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

であるから、

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

すなわち

$$\frac{AG}{GC} = \frac{10}{3}$$

である。

また、 $\triangle ABG$  にチェバの定理を用いると、

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BH}{HG} \cdot \frac{GC}{CA} = 1$$

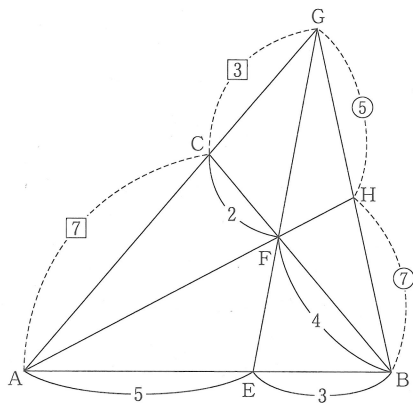
であるから、

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{BH}{HG} \cdot \frac{3}{7} = 1$$

すなわち

$$\frac{BH}{HG} = \frac{7}{5}$$

である。



$\triangle BEF$  の面積を  $S_1$  とすると、

$$S_1 = \frac{BE}{BA} \cdot \frac{BF}{BC} \cdot (\triangle ABC \text{ の面積})$$

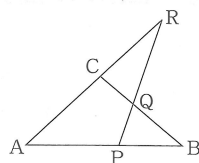
であり、①と  $\frac{BE}{BA} = \frac{3}{8}$ ,  $\frac{BF}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  より、

$$S_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

である。

また、 $\triangle BFH$  の面積を  $S_2$  とすると、

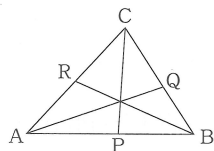
メネラウスの定理



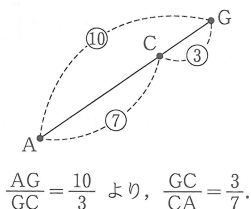
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

$$\begin{aligned} FC &= BC - BF \\ &= 6 - 4 \\ &= 2. \end{aligned}$$

チェバの定理



$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$



$$\frac{AG}{GC} = \frac{10}{3} \text{ より, } \frac{GC}{CA} = \frac{3}{7}.$$

$\angle ABC = \theta$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{(\triangle BEF \text{ の面積})}{(\triangle ABC \text{ の面積})} &= \frac{\frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \theta}{\frac{1}{2} BA \cdot BC \sin \theta} \\ &= \frac{BE}{BA} \cdot \frac{BF}{BC}. \end{aligned}$$

... ②

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = 8\sqrt{5}. \quad \dots ①$$

$$S_2 = \frac{BF}{BC} \cdot \frac{BH}{BG} \cdot (\triangle BCG \text{ の面積})$$

$$= \frac{BF}{BC} \cdot \frac{BH}{BG} \cdot \frac{GC}{CA} \cdot (\triangle ABC \text{ の面積})$$

であり, ①と  $\frac{BF}{BC} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{BH}{BG} = \frac{7}{12}$ ,  $\frac{GC}{CA} = \frac{3}{7}$  より,

$$S_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{7} \cdot 8\sqrt{5}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

... ③

である.

よって, ②, ③より,

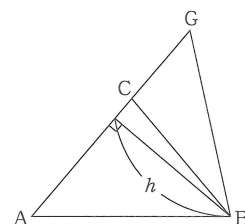
$$(\text{四角形 BEFH の面積}) = S_1 + S_2$$

$$= 2\sqrt{5} + \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{\boxed{10} \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{3}}$$

である.

←  $\triangle BFH$  と  $\triangle BCG$  は  $\angle CBG$  を共有しているから,  $S_1$  と同様に考えればよい.



$h$  を図のようにおくと,

$$\frac{(\triangle BCG \text{ の面積})}{(\triangle ABC \text{ の面積})} = \frac{\frac{1}{2}GC \cdot h}{\frac{1}{2}CA \cdot h}$$

$$= \frac{GC}{CA}.$$

