第4問　整数の性質

(1)　b を素因数分解すると，

$$b=2^{\boxed{3}}\cdot 3^{\boxed{2}}\cdot 7^{\boxed{2}}$$

である．

よって，b の正の約数の個数は，

$$(3+1)(2+1)(2+1)=\boxed{36}\ (個)$$

である．

さらに，a を素因数分解すると，

$$a=3^2\cdot 5\cdot 7$$

であるから，a と b の最大公約数は，

$$3^2\cdot 7\quad すなわち\quad \boxed{63}$$

である．

また，

$$\frac{an}{b}=\frac{3^2\cdot 5\cdot 7n}{2^3\cdot 3^2\cdot 7^2}=\frac{5n}{2^3\cdot 7}$$

より，$\dfrac{an}{b}$ が有限小数となる最小の自然数 n は $\boxed{7}$ である．

(2)
$$315x+3528y=63000. \quad \cdots ①$$

①は，

$$63\cdot 5x+63\cdot 56y=63\cdot 1000$$
$$5x+56y=1000$$

すなわち

$$\boxed{56}\,y=5\left(\boxed{200}-x\right) \quad \cdots ①'$$

と変形できる．

5 と 56 は互いに素であるから，y は 5 の倍数であり，整数 k を用いて，

$$y=5k$$

と表すことができる．

このとき，$y=5k$ を①′に代入すると，

$$56\cdot 5k=5(200-x)$$
$$56k=200-x$$

すなわち

$$x=-56k+200$$

である．

よって，

$$\begin{cases} x=-56k+200, \\ y=5k \end{cases} \quad \cdots ②$$

である．

x，y が 0 以上の整数であるとき，

素因数分解

2 以上の自然数 N は，

$$N=p^{\ell}\cdot q^{m}\cdot r^{n}\cdot\cdots$$

(p，q，r，… は素数，ℓ，m，n，… は自然数)

のように素数の積で 1 通りに表される．これを素因数分解という．

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3528 \\ \hline 2 & 1764 \\ \hline 2 & 882 \\ \hline 3 & 441 \\ \hline 3 & 147 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

よって，

$$b=2^3\cdot 3^2\cdot 7^2.$$

2 以上の自然数 N が，

$$N=p^{\ell}\cdot q^{m}\cdot r^{n}\cdot\cdots$$

のように素因数分解できるとき，N の正の約数の個数は，

$$(\ell+1)(m+1)(n+1)\cdots\ (個).$$

$$a=2^0\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1,$$
$$b=2^3\cdot 3^2\cdot 5^0\cdot 7^2$$

より，a と b の最大公約数は，

$$2^0\cdot 3^2\cdot 5^0\cdot 7^1=63.$$

(指数の小さい方を選ぶ)

既約分数 $\dfrac{y}{x}$ が有限小数となるための条件は，

分母 x の素因数が 2 または 5 のみであることである．

315 と 3528，つまり a と b は最大公約数が 63 であり，

$$315=63\cdot 5,\quad 3528=63\cdot 56$$

である．

$$-56k+200 \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad 5k \geqq 0$$

すなわち

$$0 \leqq k \leqq \frac{25}{7}$$

であり，k は整数であるから，

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

である．

よって，① を満たす 0 以上の整数 x，y の組は $\boxed{4}$ 組あり，その中で x が最小のものは，② において $k=3$ として，

$$(x,\ y)=(\boxed{32},\ \boxed{15})$$

である．

(3)

$$\frac{15}{32}=\frac{2^3+2^2+2^1+2^0}{2^5}$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}$$

であるから，$\frac{15}{32}$ を 2 進法で表すと，

$$\boxed{0}.\boxed{01111}_{(2)}$$

であり，

$$\frac{15}{32}=\frac{30}{64}$$

$$=\frac{4^2+3\cdot4^1+2\cdot4^0}{4^3}$$

$$=\frac{1}{4^1}+3\cdot\frac{1}{4^2}+2\cdot\frac{1}{4^3}$$

であるから，$\frac{15}{32}$ を 4 進法で表すと，

$$\boxed{0}.\boxed{132}_{(4)}$$

である．

n 進法の小数

n を 2 以上の自然数，M を $0<M<1$ を満たす実数とし，

$$M=p\cdot\frac{1}{n^1}+q\cdot\frac{1}{n^2}+r\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

（p，q，r，$\cdots$ は 0 以上 n 未満の整数）

となるとき，実数 M を n 進法で表すと，

$$M=0.pqr\cdots_{(n)}$$

である．