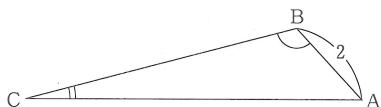


第2問 図形と計量，データの分析

[1]



$$\cos \angle ABC = -\frac{\sqrt{15}}{8} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} \sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{64}} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

である.

外接円 O の半径を R とし, $\triangle ABC$ に正弦定理を用いると,

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$

であるから,

$$\begin{aligned} R &= \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} \\ &= \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

であり, さらに, 正弦定理を用いると,

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$$

であるから,

$$\begin{aligned} AC &= 2R \sin \angle ABC \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{7}{8} \\ &= 7 \end{aligned}$$

である.

また, $BC = x (> 0)$ とおき, $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$$

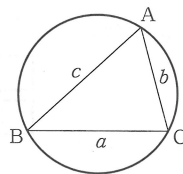
$$7^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$$

$$2x^2 + \sqrt{15}x - 90 = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} \leftarrow 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき,} \\ \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

(R は外接円の半径)

$\triangle ABC$ に正弦定理を用いると,

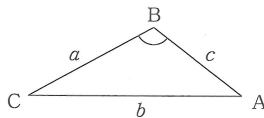
$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$$

であるから,

$$\begin{aligned} AC &= \frac{AB}{\sin \angle ACB} \cdot \sin \angle ABC \\ &= \frac{2}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{7}{8} \\ &= 7 \end{aligned}$$

と求めてもよい.

余弦定理



$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\sqrt{15} \pm \sqrt{(\sqrt{15})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-90)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-\sqrt{15} \pm 7\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{15}}{2}, -2\sqrt{15} \end{aligned}$$

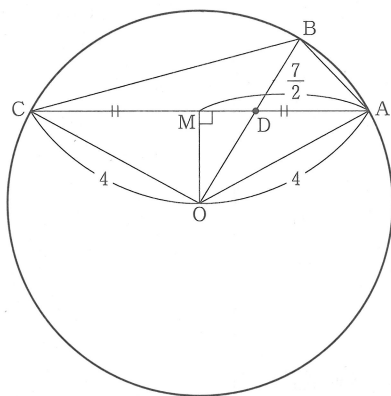
である.

$x > 0$ であるから,

$$\text{BC} = x = \frac{\boxed{3} \sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{2}}$$

である。

辺 AC の中点を M とする. $\triangle OAC$ は $OA = OC (=R)$ の二等辺三角形であるから, $OM \perp AC$ である.



$\triangle OAM$ に三平方の定理を用いると,

$$\begin{aligned} \text{OM} &= \sqrt{\text{OA}^2 - \text{AM}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle OAC$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AC \cdot OM &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \\ &= \frac{7\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

である.

さらに、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}BC \cdot CA \sin \angle ACB &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{2} \cdot 7 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{21\sqrt{15}}{16}\end{aligned}$$

である.

よって,

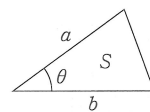
← 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

← $OA = R = 4.$

$$AC=7 \text{ より, } AM=\frac{1}{2}AC=\frac{7}{2}.$$

三角形の面積



$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta.$$

$$OD:BD = (\triangle OAC \text{ の面積}) : (\triangle ABC \text{ の面積})$$

$$= \frac{7\sqrt{15}}{4} : \frac{21\sqrt{15}}{16}$$

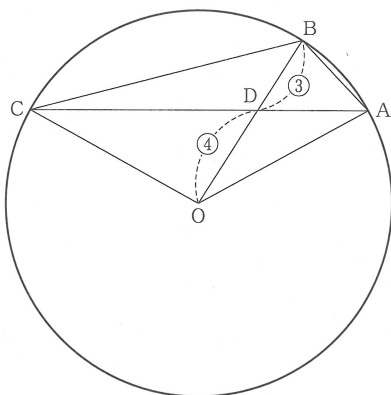
$$= 4:3$$

であり,

$$\frac{OD}{OB} = \frac{4}{4+3}$$

$$= \frac{\boxed{4}}{\boxed{7}}$$

である.



[2]

散布図より, 固定電話に対する月別の支出金額および携帯電話に対する月別の支出金額の第1四分位数, 中央値, 第3四分位数は, それぞれ次の表の範囲に含まれる.

	第1四分位数	中央値	第3四分位数
固定電話に対する月別の支出金額	2650~2700	2700~2750	2750~2800
携帯電話に対する月別の支出金額	10100~10200	10400~10500	10600~10700

箱ひげ図 a は, 中央値が 2700 より小さいから A ではない.

箱ひげ図 b は, すべての値が適している.

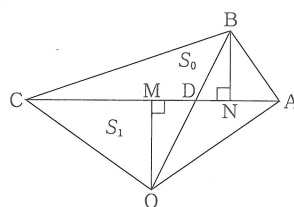
箱ひげ図 c は, 第3四分位数が 2800 より大きいから A ではない.

よって, 固定電話に対する月別の支出金額の箱ひげ図 A は b である.

また, 箱ひげ図 d, e は, 第1四分位数がともに 10100 より小さいから B ではない.

箱ひげ図 f は, すべての値が適している.

よって, 携帯電話に対する月別の支出金額の箱ひげ図 B は f である.



上図のように点 N を定め, $\triangle ABC$ の面積を S_0 , $\triangle OAC$ の面積を S_1 とすると,

$$S_0 = \frac{1}{2} AC \cdot BN,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} AC \cdot OM$$

であるから,

$$S_1:S_0 = OM:BN.$$

また, $\triangle ODM \sim \triangle BDN$ より,

$$OM:BN = OD:BD.$$

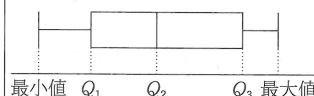
よって,

$$OD:BD = S_1:S_0.$$

月別の 12 個の支出金額からなるデータであるから, 第1四分位数は値の小さい方から 3 番目と 4 番目の平均値, 中央値は値の小さい方から 6 番目と 7 番目の平均値, 第3四分位数は値の小さい方から 9 番目と 10 番目の平均値である.

箱ひげ図

データの散らばりを, 最小値, 第1四分位数 (Q_1), 中央値 (Q_2), 第3四分位数 (Q_3), 最大値を用いて図示したものを箱ひげ図という.



したがって、**サ**に当てはまるものは**⑤**である。

[3]

- (1) データⅢの散布図より、エアコンに対する支出金額が一番多い月は、ビデオカメラに対する支出金額は50～100円であり、最大値ではないから、**①**は正しいとはいえない。

データⅣの散布図は、右上がりの分布になっていない。よって、エアコンに対する支出金額が多くなるほど、ミシンに対する支出金額が多くなる傾向にあるとはいえないから、**①**は正しいとはいえない。

データⅠの散布図より、エアコンに対する支出金額が1500円以下である月はすべて、冷蔵庫に対する支出金額は1000円以下であるから、**②**は正しい。

データⅡの散布図より、エアコンに対する支出金額が1500円以上であり、テレビに対する支出金額が400円以上である月は、3か月ある。よって、全体の2割以上であるから、**③**は正しい。

したがって、4つの散布図から読み取れることとして正しいものは**②**と**③**であるから、**シ**、**ス**に当てはまるものは

②、**③**である。

- (2) 相関係数の正負は共分散の正負と一致するから、相関係数が負になるものは、データⅡ、Ⅲ、Ⅳの**3**個ある。

データⅣの共分散は-5041、エアコンに対する支出金額の標準偏差は886、ミシンに対する支出金額の標準偏差は20であるから、データⅣの相関係数は、

$$\frac{-5041}{886 \times 20} = -0.284 \dots$$

であり、**ソ**に当てはまるものは**⑦**である。

- (3) エアコンに対する月別の支出金額の変更前のデータを

$$x_1, x_2, \dots, x_{12}$$

とし、この平均値を $\bar{x}$ とすると、分散 Y は、

← 12か月分のデータであるから、そのうちの2割は、

$$12 \times \frac{2}{10} = 2.4 (\text{か月})$$

である。

← 相関係数

変数 x と変数 y の標準偏差をそれぞれ s_x 、 s_y とし、共分散を s_{xy} とすると、

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

を x と y の相関係数という。

$$Y = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{12} - \bar{x})^2}{12}$$

である。

また、エアコンに対する月別の支出金額をそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍した変更後のデータは、

$$\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \cdots, \frac{1}{2}x_{12}$$

であり、この平均値は $\frac{1}{2}\bar{x}$ であるから、分散 X は、

$$\begin{aligned} X &= \frac{\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}\bar{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\bar{x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}x_{12} - \frac{1}{2}\bar{x}\right)^2}{12} \\ &= \frac{\left\{\frac{1}{2}(x_1 - \bar{x})\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}(x_2 - \bar{x})\right\}^2 + \cdots + \left\{\frac{1}{2}(x_{12} - \bar{x})\right\}^2}{12} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{12} - \bar{x})^2}{12} \\ &= \frac{1}{4} Y \end{aligned}$$

である。

よって、

$$\frac{X}{Y} = \frac{1}{4}$$

であるから、タ に当てはまるものは ② である。

冷蔵庫に対する月別の支出金額の変更前のデータを

$$y_1, y_2, \cdots, y_{12}$$

とし、この平均値を $\bar{y}$ とすると、標準偏差 W は、

$$W = \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_{12} - \bar{y})^2}{12}}$$

である。

また、冷蔵庫に対する月別の支出金額をそれぞれ 2 倍した変更後のデータは、

$$2y_1, 2y_2, \cdots, 2y_{12}$$

であり、この平均値は $2\bar{y}$ であるから、標準偏差 Z は、

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{(2y_1 - 2\bar{y})^2 + (2y_2 - 2\bar{y})^2 + \cdots + (2y_{12} - 2\bar{y})^2}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{\{2(y_1 - \bar{y})\}^2 + \{2(y_2 - \bar{y})\}^2 + \cdots + \{2(y_{12} - \bar{y})\}^2}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{4\{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_{12} - \bar{y})^2\}}{12}} \\ &= 2\sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_{12} - \bar{y})^2}{12}} \\ &= 2W \end{aligned}$$

偏差・分散・標準偏差

変量 x についてのデータの値を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とし、その平均値を $\bar{x}$ とするとき、

$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \cdots, x_n - \bar{x}$ をそれぞれ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の偏差という。さらに、偏差の 2 乗の平均値を x の分散といい、 s^2 で表す。つまり、

$$s^2 = \frac{1}{n} \{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\}.$$

また、 $\sqrt{s^2}$ を s で表し、 x の標準偏差という。

$$\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \cdots, \frac{1}{2}x_{12}$$

の平均値は、

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \cdots + \frac{1}{2}x_{12}}{12} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}}{12} \\ &= \frac{1}{2}\bar{x}. \end{aligned}$$

である。

よって,

$$\frac{Z}{W} = 2$$

であるから, に当てはまるものは である。