第1問　数と式，命題，2次関数

［1］

$$(a-2)x \geqq 2a^2-5a+2 \ (a \neq 2) \qquad \cdots ①$$

$$|x+1| \leqq 3 \qquad \cdots ②$$

(1) ① の右辺は，

$$2a^2-5a+2=\left(a-\boxed{2}\right)\left(\boxed{2}a-\boxed{1}\right)$$

と因数分解できるから，① は，

$$(a-2)x \geqq (a-2)(2a-1)$$

となり，解は，

$a>\boxed{2}$ のとき，$x \geqq 2a-1$，

$a<2$ のとき，　　$x \leqq 2a-1$

である．したがって，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものはそれぞれ $\boxed{②}$，$\boxed{③}$ である．

← $a<2$ のとき，$a-2<0$ であるから，負の数 $a-2$ で ① の両辺を割ると，不等号の向きは変わる．

(2) ② より，

$$-3 \leqq x+1 \leqq 3$$

であるから，② の解は，

$$-4 \leqq x \leqq 2$$

である．

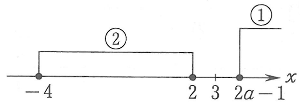
← $k>0$ のとき，X の不等式について，

$$|X| \leqq k \iff -k \leqq X \leqq k.$$

(i) $a>2$ のとき．

$$2a-1>3$$

であるから，① かつ ② を満たす負の整数 x は存在しない．

← 

(ii) $a<2$ のとき．

① かつ ② を満たす負の整数 x がちょうど二つ存在する条件は，

$$-3 \leqq 2a-1 < -2$$

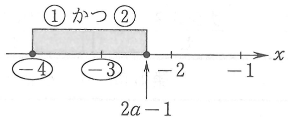
であり，これを解くと，

$$-2 \leqq 2a < -1$$

$$\boxed{-1} \leqq a < \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$$

である．

したがって，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものはそれぞれ $\boxed{③}$，$\boxed{①}$ である．

← 

$2a-1=-3$ のとき，① かつ ② は，

$$-4 \leqq x \leqq -3$$

となるから，① かつ ② を満たす負の整数 x は，

$$-4,\ -3$$

の 2 つであり，適する．

$2a-1=-2$ のとき，① かつ ② は，

$$-4 \leqq x \leqq -2$$

となるから，① かつ ② を満たす負の整数 x は，

$$-4,\ -3,\ -2$$

の 3 つであり，適さない．

〔2〕

$s=0.\dot{4}$ とおくと,

$$\begin{array}{rl} 10s = & 4.444\cdots \\ -)\quad s = & 0.444\cdots \\ \hline 9s = & 4 \\ s = & \dfrac{4}{9} \end{array}$$

である.

したがって, $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である.

また, $t=8.\dot{4}$ とおくと,

$$\begin{array}{rl} 10t = & 84.444\cdots \\ -)\quad t = & 8.444\cdots \\ \hline 9t = & 76 \\ t = & \dfrac{76}{9} \end{array}$$

である.

← $8.\dot{4}=8+0.\dot{4}$
$=8+\dfrac{4}{9}$
$=\dfrac{76}{9}$
としてもよい.

したがって, $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⑥}$ である.

よって,

$$a=0.\dot{4}=\frac{4}{9},\quad b=8.\dot{4}=\frac{76}{9}$$

である.

命題P:「$x^2<a$ または $x^3>b-a$」 ならば $x>-1$

の対偶は,

$$x \leqq -1 \quad \text{ならば} \quad 「x^2 \geqq a \text{ かつ } x^3 \leqq b-a」$$

である.

← 命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は,
$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$.
また,

ド・モルガンの法則
$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$,
$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$.

したがって, $\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものはそれぞれ $\boxed{⑦}$, $\boxed{③}$ である.

ここで, $x^2 \geqq a$, すなわち $x^2 \geqq \dfrac{4}{9}$ を満たす実数 x の値の範囲は,

$$x \leqq -\frac{2}{3},\quad \frac{2}{3} \leqq x \qquad \cdots①$$

である.

また, $x^3 \leqq b-a$, すなわち $x^3 \leqq 8$ を満たす実数 x の値の範囲は,

$$x \leqq 2 \qquad \cdots②$$

である.

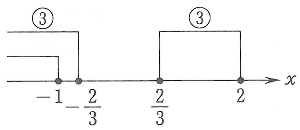
よって, ① かつ ② を満たす実数 x の値の範囲は,

$$x \leqq -\frac{2}{3},\quad \frac{2}{3} \leqq x \leqq 2 \qquad \cdots③$$

であるから, P の対偶は,

$$x \leqq -1 \quad \text{ならば} \quad 「x \leqq -\frac{2}{3} \text{ または } \frac{2}{3} \leqq x \leqq 2」$$

と同値であり, これは真である.



ゆえに，P も真である．

したがって，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

命題とその対偶は，真偽が一致する．

さらに，

$$「x^2<\frac{4}{9}\ \text{または}\ x^3>8」$$

$$\Longleftrightarrow「-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}\ \text{または}\ x>2」$$

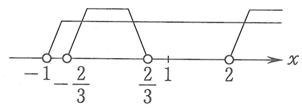
であることと，

命題：$「-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ または $x>2」$ ならば $x>-1$

は真であり，

命題：$x>-1$ ならば $「-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ または $x>2」$

は偽である（反例は $x=1$ など）ことから，



命題：$「x^2<\frac{4}{9}$ または $x^3>8」$ ならば $x>-1$

は真であり，

命題：$x>-1$ ならば $「x^2<\frac{4}{9}$ または $x^3>8」$

は偽である．

よって，$x^2<\frac{4}{9}$ または $x^3>8$ であることは，$x>-1$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない．

命題「$p \Longrightarrow q$」が真，「$q \Longrightarrow p$」が偽であるとき，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない．

したがって，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

［3］

$$f(x)=x^2-4ax+5a^2+2a-8$$
$$=(x-2a)^2+a^2+2a-8$$

と変形できるから，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}\,a,\ a^2+\boxed{2}\,a-\boxed{8}\right)$$

である．

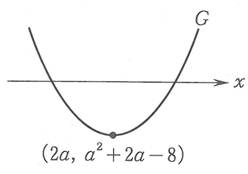
放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は，

$$(p,\ q).$$

(1) G は下に凸の放物線であるから，G が x 軸と異なる 2 点で交わる条件は，

$$(G\text{の頂点の}\ y\ \text{座標})<0$$

である．



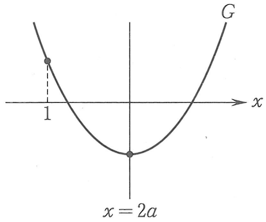
よって，求める a の値の範囲は，

$$a^2+2a-8<0$$
$$(a+4)(a-2)<0$$
$$\boxed{-4}<a<\boxed{2}$$

である．

(2) G が x 軸の $x \geqq 1$ の部分と異なる2点で交わる条件は,

$$\begin{cases} (G\text{ の頂点の } y \text{ 座標}) < 0, & \cdots ① \\ \text{軸}: x = 2a > 1, & \cdots ② \\ f(1) = 5a^2 - 2a - 7 \geqq 0 & \cdots ③ \end{cases}$$



である.

①より,

$$-4 < a < 2 \qquad \cdots ①'$$

である.

②より,

$$a > \frac{1}{2} \qquad \cdots ②'$$

である.

③より,

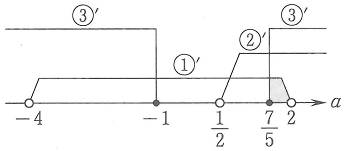
$$(5a-7)(a+1) \geqq 0$$

$$a \leqq -1, \quad \frac{7}{5} \leqq a \qquad \cdots ③'$$

である.

よって,求める a の値の範囲は,①′,②′,③′ の共通部分より,

$$\frac{\boxed{7}}{\boxed{5}} \leqq a < \boxed{2}$$



である.