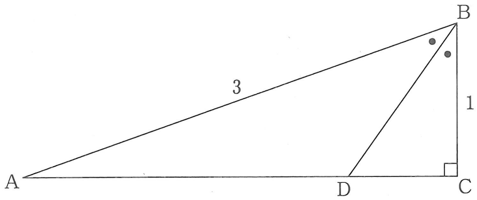
第5問　図形の性質



直角三角形 ABC に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}\\ &= \sqrt{3^2-1^2}\\ &= \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．

さらに，角の二等分線の性質より，

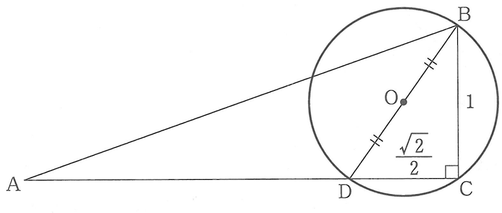
$$\begin{aligned}\mathrm{AD}:\mathrm{DC} &= \mathrm{BA}:\mathrm{BC}\\ &= 3:1 \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD} &= \frac{3}{3+1}\mathrm{AC}\\ &= \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{2}\\ &= \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CD} &= \frac{1}{3+1}\mathrm{AC}\\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2}\\ &= \frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．

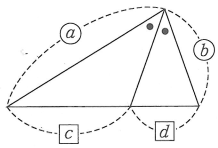


$\angle\mathrm{BCD}=90°$ であるから，線分 BD は 3 点 B，C，D を通る円の直径である．

ここで，直角三角形 BCD に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} &= \sqrt{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2}\\ &= \sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

角の二等分線の性質



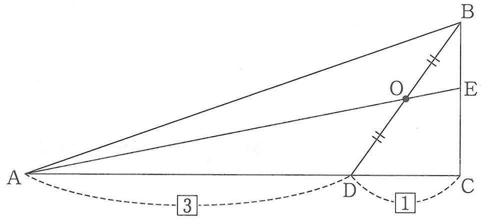
$c:d=a:b.$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}OB=OD&=\frac{1}{2}BD\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$

である．



△BCD と直線 AE に対して，メネラウスの定理を用いると，

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CA}{AD}\cdot\frac{DO}{OB}=1$$

であり，O が線分 BD の中点であることと ① より，

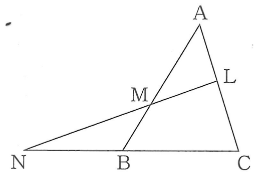
$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1}=1$$

すなわち

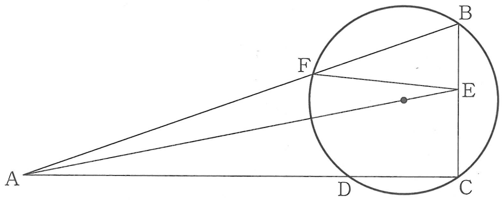
$$\frac{BE}{EC}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \quad \cdots ②$$

である．

メネラウスの定理



$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BM}{MA}=1.$$



$$\begin{aligned}(\triangle EFB\text{ の面積})&=\frac{BF}{BA}(\triangle ABE\text{ の面積})\\&=\frac{BF}{BA}\cdot\frac{BE}{BC}(\triangle ABC\text{ の面積})\end{aligned}$$

であるから，

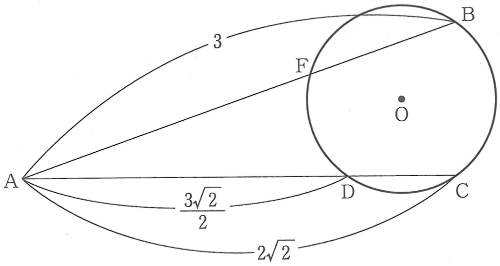
$$\frac{(\triangle EFB\text{ の面積})}{(\triangle ABC\text{ の面積})}=\frac{BF}{BA}\cdot\frac{BE}{BC} \quad \cdots ③$$

である．

③ は次のように求めてもよい．

$$\begin{aligned}\frac{(\triangle EFB\text{ の面積})}{(\triangle ABC\text{ の面積})}&=\frac{\frac{1}{2}BF\cdot BE\sin\angle FBE}{\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC}\\&=\frac{\frac{1}{2}BF\cdot BE\sin\angle ABC}{\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC}\\&=\frac{BF}{BA}\cdot\frac{BE}{BC}.\end{aligned}$$

まず，$\frac{BF}{BA}$ を調べる．



方べきの定理を用いると，

$$AF \cdot AB = AD \cdot AC$$

であるから，$AB=3$，$AD=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$AC=2\sqrt{2}$ を代入すると，

$$AF \cdot 3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$AF = 2$$

である．

よって，$BF = AB - AF = 3 - 2 = 1$ であるから，

$$\frac{BF}{BA} = \frac{1}{3} \qquad \cdots ④$$

である．

また，② より，

$$\frac{BE}{BC} = \frac{3}{7} \qquad \cdots ⑤$$

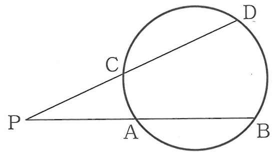
であるから，④，⑤ を ③ に代入すると，

$$\frac{(\triangle EFB \text{ の面積})}{(\triangle ABC \text{ の面積})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$$

$$= \frac{\boxed{1}}{\boxed{7}}$$

である．

方べきの定理



$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$

$\frac{BE}{EC} = \frac{3}{4}.$