第4問　整数の性質

p が素数であるとき，p^2 の正の約数は 1，p，p^2 であるから，その総和は，

$$1+p+p^2 \qquad \cdots ②$$

である．

q が 13 と異なる素数であるとき，$13q$ の正の約数は 1，q，13，$13q$ であるから，その総和は，

$$1+q+13+13q \qquad \cdots ③$$

である．

(1)　$p=7$ のとき，② より p^2 の正の約数の総和は，

$$1+7+7^2=\boxed{57}$$

である．

$q=11$ のとき，③ より $13q$ の正の約数の総和は，

$$1+11+13+13\cdot 11=\boxed{168}$$

である．

(2)　p^2 の正の約数の総和が 133 であるとき，② より，

$$1+p+p^2=133$$

が成り立つから，

$$p^2+p-132=0$$
$$(p-11)(p+12)=0$$

であり，$p>0$ より，

$$p=\boxed{11}$$

である．

$q=13$ とすると，$13q$ すなわち 13^2 の正の約数の総和は，

$$1+13+13^2=183$$

であるから，$13q$ の正の約数の総和が 280 であるとき，$q \neq 13$ である．

③ より，

$$1+q+13+13q=280$$

が成り立つから，

$$14q=266$$
$$q=\boxed{19}$$

である．

さらに，自然数 N を p^2 で割ると商が x で余りが p であるとき，

$$N=p^2x+p \qquad \cdots ④$$

であり，自然数 N を $13q$ で割ると商が y で余りが 13 であると

き，

$$N=13qy+13 \qquad \cdots ⑤$$

である．

④，⑤より，

$$(p^2x+p)-(13qy+13)=0$$

すなわち

$$p^2x-13qy=-p+13$$

であり，$p=11$ より，

$$p^2x-13qy=\boxed{2} \qquad \cdots ①$$

である．

$p=11$，$q=19$ であるから，①より，

$$121x-247y=2 \qquad \cdots ⑥$$

である．

ここで，

$$247=121\cdot 2+5,$$
$$121=5\cdot 24+1$$

であるから，

$$\begin{aligned} 1&=121-5\cdot 24 \\ &=121-(247-121\cdot 2)\cdot 24 \\ &=121\cdot 49-247\cdot 24 \end{aligned}$$

すなわち

$$121\cdot 49-247\cdot 24=1$$

であり，両辺を2倍して，

$$121\cdot 98-247\cdot 48=2 \qquad \cdots ⑦$$

である．

⑥，⑦より，

$$121(x-98)=247(y-48)$$

であり，x，y は0以上の整数で，121と247は互いに素であるから，

⬅ x，y は商であるから，0以上の整数．

$$x-98=247k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくことができ，このとき，

$$\begin{cases} x=247k+98, \\ y=121k+48 \end{cases} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots ⑧$$

である．

①を満たす自然数 x，y の組の中で，x の値が最小のものは，⑧において $k=0$ として，

$$x=\boxed{98},\quad y=\boxed{48}$$

である．

④，⑧を用いると，

$$N = p^2x + p$$
$$= 121(247k + 98) + 11 \qquad \cdots ⑨$$

であるから，N のうち，小さい方から3番目のものを N' とすると，⑨において $k=2$ として，

$$N' = 71643$$

である.

$$\begin{cases} 3^{10} = 59049, \\ 3^{11} = 177147 \end{cases}$$

であるから，

$$3^{10} < N' < 3^{11}$$

である.

よって，N' を3進法で表すと $\boxed{11}$ 桁となる.

⬅ $p=11$.
⑤，⑧を用いて考えてもよい.

⬅ $k=0, 1, 2, \cdots$ であるから，小さい方から3番目の N は $k=2$ とすれば得られる.

⬅ 自然数 m が3進法で n 桁となるための条件は，

$$3^{n-1} \leqq m < 3^n.$$