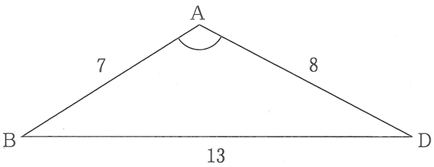
第２問　図形と計量，データの分析

〔１〕

(1)



$\triangle$ABD に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{DAB}=\frac{\mathrm{DA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BD}^2}{2\mathrm{DA}\cdot\mathrm{AB}}$$

$$=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot8\cdot7}$$

$$=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$$

である．

よって，$\angle\mathrm{DAB}=120^\circ$ であり，

$$\sin\angle\mathrm{DAB}=\sin120^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

である．

また，円Ｏの半径を R とし，$\triangle$ABD に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\angle\mathrm{DAB}}=2R$$

であるから，

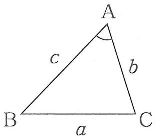
$$R=\frac{\mathrm{BD}}{2\sin\angle\mathrm{DAB}}$$

$$=\frac{13}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\boxed{13}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$$

である．

余弦定理



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

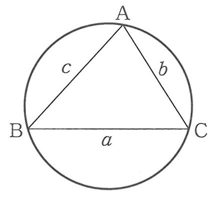
$$\sin\angle\mathrm{DAB}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{DAB}}$$

$$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求めてもよい．

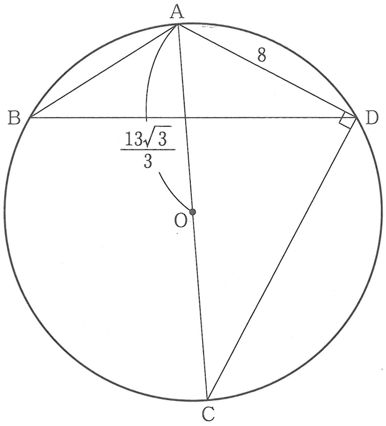
正弦定理



外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

(2)



線分 AC の長さが最大となるのは，

線分 AC が円 O の直径となるとき

であるから，

$$AC = 2R = 2\cdot\frac{13\sqrt{3}}{3} = \frac{26\sqrt{3}}{3}$$

である．

円周角の定理より，

$$\angle ADC = 90^\circ$$

であるから，直角三角形 ACD に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{AC^2 - DA^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{26\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 8^2} \\ &= \sqrt{\frac{2^2(13^2 - 3\cdot 4^2)}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{2^2\cdot 11^2}{3}} \\ &= \frac{\boxed{22}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}} \end{aligned}$$

である．

直角三角形 ACD の面積は，

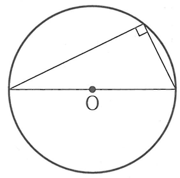
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}CD\cdot DA &= \frac{1}{2}\cdot\frac{22\sqrt{3}}{3}\cdot 8 \\ &= \frac{88\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

であるから，△ACD の内接円の半径を r とすると，

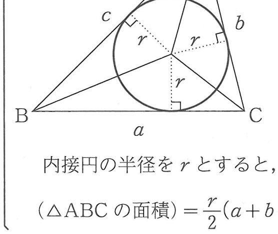
$$\frac{88\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{2}(AC + CD + DA)$$

すなわち

$$\frac{88\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{2}\left(\frac{26\sqrt{3}}{3} + \frac{22\sqrt{3}}{3} + 8\right)$$



直径に対する円周角は 90° である．



内接円の半径を r とすると，

(△ABC の面積) $= \frac{r}{2}(a+b+c)$．

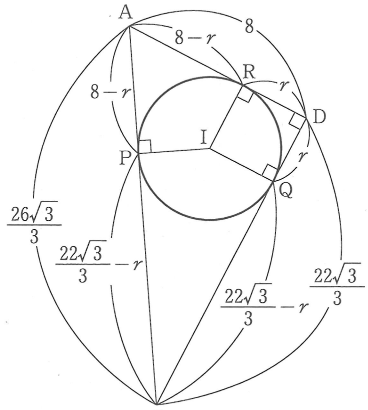
であり，

$$r=\frac{22\sqrt{3}}{3(2\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{\boxed{12}-\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$$

である．

(注) 次のように考えてもよい．



直角三角形ACDの内接円の中心をI，半径をrとする．また，円Iと辺AC，CD，DAの接点をそれぞれP，Q，Rとする．

$$\angle \mathrm{IQD}=\angle \mathrm{IRD}=\angle \mathrm{QDR}=90^\circ$$

より，$\angle \mathrm{QIR}=90^\circ$ であり，さらに，

$$\mathrm{IQ}=\mathrm{IR}=r$$

であるから，四角形IQDRは一辺の長さがrの正方形である．

よって，

$$\mathrm{DQ}=\mathrm{DR}=r$$

である．

$\mathrm{DA}=8$，$\mathrm{CD}=\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$ であるから，接線の長さを考えると，

$$\begin{cases} \mathrm{AP}=\mathrm{AR}=8-r, \\ \mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=\dfrac{22\sqrt{3}}{3}-r \end{cases}$$

である．

$$\mathrm{AP}+\mathrm{CP}=\mathrm{AC}$$

であるから，

$$(8-r)+\left(\frac{22\sqrt{3}}{3}-r\right)=\frac{26\sqrt{3}}{3}$$

すなわち

$$r=4-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である．

したがって，△ACD の内接円の半径は，

$$\frac{12-2\sqrt{3}}{3}$$

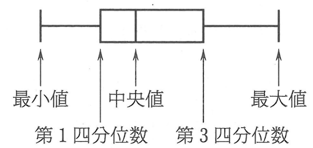
である．

［2］

(1)　箱ひげ図より，物理のデータの中央値は，

$\boxed{4}.\boxed{5}$ 点

である．

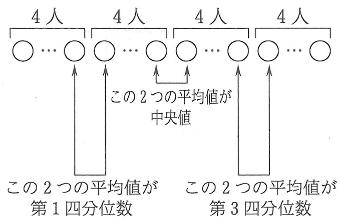


得点はすべて整数値であるから，中央値の小数第1位は0または5である．

(2)　箱ひげ図と⓪，①，②，③の散布図について，物理の得点の最小値，第1四分位数，中央値，第3四分位数，最大値は次の表のようになる．

	最小値	第1四分位数	中央値	第3四分位数	最大値
箱ひげ図	2	3.5	4.5	7	9
⓪	2	4	4.5	7	9
①	2	3.5	4.5	7	9
②	2	3.5	4.5	7	9
③	2	3.5	5	7	9

データは生徒16人についてのものであるから，第1四分位数は得点の低い方から4番目と5番目の生徒の得点の平均値，中央値は得点の低い方から8番目と9番目の生徒の得点の平均値，第3四分位数は得点の低い方から12番目と13番目の生徒の得点の平均値である．



よって，正しい散布図は①か②である．

箱ひげ図と①，②の散布図について，数学の得点の最小値，第1四分位数，中央値，第3四分位数，最大値は次の表のようになる．

	最小値	第1四分位数	中央値	第3四分位数	最大値
箱ひげ図	1	3.5	5.5	7.5	9
①	1	3	5.5	7.5	10
②	1	3.5	5.5	7.5	9

よって，物理と数学の得点の散布図として正しいものは②である．したがって，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

［3］

(1)　2015年の13の都市の桜の満開日までの日数のデータ(単位は日)を小さい方から順に並べると，

4，5，5，5，6，7，7，7，7，8，9，10，11

であるから，最小値，第1四分位数，中央値，第3四分位数，四分位範囲はそれぞれ次の表のようになる．

最小値	4
第 1 四分位数	5
中央値	7
第 3 四分位数	8.5
四分位範囲	3.5

2014 年の 13 の都市の桜の満開日までの日数のデータより，最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，四分位範囲として考えられる値はそれぞれ次の表のようになる．

最小値	2，3
第 1 四分位数	6，6.5，7
中央値	6，7
第 3 四分位数	8，8.5，9
四分位範囲	1，1.5，2，2.5，3

よって，最小値は，2015 年より 2014 年の方が小さいから，⓪は正しい．

中央値は，2015 年より 2014 年の方が小さい，もしくは，等しいから，①は正しいとはいえない．

四分位範囲は，2015 年より 2014 年の方が小さいから，②は正しい．

以上より，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(2)(i) 満開日までの日数のデータと日照率のデータの相関係数は，

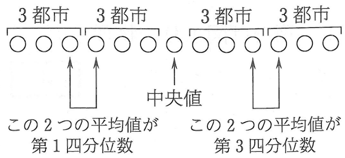
$$\frac{9.69}{2.00\times6.42}=\frac{969}{2\times642}=0.754\cdots$$

であるから，$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

(ii) ⓪は日照率と満開日までの日数に正の相関があること，①は負の相関があること，②は相関がないことを主張している．

(i)より，日照率と満開日までの日数には正の相関があるといえるから，$\boxed{\text{ネ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

データは 13 の都市についてのものであるから，第 1 四分位数は日数の短い方から 3 番目と 4 番目の都市の日数の平均値，中央値は日数の短い方から 7 番目の都市の日数，第 3 四分位数は日数の短い方から 10 番目と 11 番目の都市の日数の平均値である．



(四分位範囲)

＝(第 3 四分位数)－(第 1 四分位数)．

例えば，満開日までの日数の短い方から 3 番目と 4 番目の都市の日数がどちらも 6 日または 7 日であるから，第 1 四分位数は，

$$\frac{6+6}{2}=6,\quad \frac{6+7}{2}=6.5,\quad \frac{7+7}{2}=7$$

のいずれかである．

相関係数

2 つの変量 x，y について，

x と y の共分散を s_{xy}，

x の標準偏差を s_x，

y の標準偏差を s_y

とするとき，x と y の相関係数 r は，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

r のとり得る値の範囲は，

$$-1\leqq r\leqq 1$$

であり，1 に近いほど正の相関が強く，-1 に近いほど負の相関が強い．