第1問　数と式，集合と命題，2次関数

〔1〕

$\alpha=\dfrac{47}{3(4\sqrt{3}+1)}$ の分母を有理化すると，

$$\alpha=\frac{47(4\sqrt{3}-1)}{3(4\sqrt{3}+1)(4\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{47(4\sqrt{3}-1)}{3(16\cdot 3-1)}$$

$$=\frac{47(4\sqrt{3}-1)}{3\cdot 47}$$

$$=\frac{\boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}-\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である．

← 分母分子に $4\sqrt{3}-1$ を掛け，分母の計算に，

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

を用いる．

(1)　$4\sqrt{3}=\sqrt{48}$，$7=\sqrt{49}$ であるから，

$$4\sqrt{3}<7$$

であり，

$$\alpha-2=\frac{4\sqrt{3}-1}{3}-2$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-7}{3}$$

$$<0$$

であるから，

$$\alpha<2$$

である．

← 大小関係がわかりにくいときは，2数の差を考えるとよい．

　よって，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ であり，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(2)　$(\alpha-2)x<\alpha^2-4$ を変形すると，

$$(\alpha-2)x<(\alpha-2)(\alpha+2)$$

であり，両辺を $\alpha-2$ で割ると，$\alpha-2<0$ より，

$$x>\alpha+2 \qquad \cdots ①$$

となる．

← $a<0$ のとき，

$$ab<ac \iff b>c.$$

$$\alpha+2=\frac{4\sqrt{3}-1}{3}+2=\frac{4\sqrt{3}+5}{3}$$

であり，$4\sqrt{3}=\sqrt{48}$，$6=\sqrt{36}$，$7=\sqrt{49}$ より，

$$6<4\sqrt{3}<7$$

であるから，

$$\frac{6+5}{3}<\frac{4\sqrt{3}+5}{3}<\frac{7+5}{3}$$

すなわち

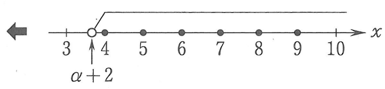
$$\frac{11}{3}<\alpha+2<4$$

である．

よって，① を満たす１桁の自然数 x は，

4，5，6，7，8，9

の $\boxed{\ 6\ }$ 個である．



［２］

(1)　「$a\neq1$ ならば，a, b の少なくとも一方は無理数である」．　…①

① の逆は「a，b の少なくとも一方が無理数であるならば，$a\neq1$」であるから $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

命題「p ならば q」の逆は「q ならば p」であり，対偶は「$\overline{q}$ ならば $\overline{p}$」である．ただし，$\overline{p}$，$\overline{q}$ はそれぞれ条件 p，q の否定を表す．

① の対偶は「a，b がともに有理数であるならば，$a=1$」であるから $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

「a，b の少なくとも一方が無理数である」の否定は「a，b がともに有理数である」である．

(2)　(1) より，① の対偶は，

「a，b がともに有理数であるならば，$a=1$」　…②

である．② の真偽を判定すればよい．

命題とその対偶の真偽は一致する．

a，b がともに有理数ならば，$a+b\sqrt{5}=1$ および $\sqrt{5}$ が無理数であることより，

$$a=1 \quad \text{かつ} \quad b=0.$$

$\sqrt{5}$ は無理数であるから，p，q，p'，q' が有理数であるとき，

$$p+q\sqrt{5}=p'+q'\sqrt{5}$$
$$\iff p=p' \quad \text{かつ} \quad q=q'.$$

ゆえに，対偶 ② は真であり，もとの命題 ① も真である．よって，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

次に，命題

「a，b の少なくとも一方が無理数であるならば，$a\neq1$」　…③

の真偽を，その対偶

「$a=1$ ならば，a，b はともに有理数である」　…④

の真偽により判定する．

$a=1$ のとき，$a+b\sqrt{5}=1$ より，

$$\sqrt{5}\,b=0 \quad \text{すなわち} \quad b=0$$

である．

よって，a，b はともに有理数であるから，対偶 ④ は真であり，もとの命題 ③ も真である．

1，0 はともに有理数である．

①，③ が真であることより，a，b の少なくとも一方が無理数であることは，$a\neq1$ であるための必要十分条件であるから，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

命題「p ならば q」および「q ならば p」がともに真であるとき，p は q であるための必要十分条件である．

[3]

$$y=ax^2+bx+c. \quad \cdots ①$$

(1) ① のグラフ G が 2 点 $(-2,\ 10)$, $(0,\ 10)$ を通るから,

$$\begin{cases} 10=a(-2)^2+b(-2)+c, \\ 10=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 4a-2b+c=10, & \cdots ② \\ c=10 & \cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ. ③ を ② に代入すると,

$$4a-2b+10=10$$

$$b=2a$$

であるから,

$$b=\boxed{2}a, \quad c=\boxed{10}$$

である. このとき, ① は,

$$\begin{aligned} y&=ax^2+2ax+10 \\ &=a(x^2+2x)+10 \\ &=a\{(x+1)^2-1^2\}+10 \\ &=a(x+1)^2-a+10 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

と変形できるから, G の頂点の座標は,

$$\left(\boxed{-1},\ \boxed{-}a+\boxed{10}\right)$$

である.

放物線

$$y=a(x-p)^2+q$$

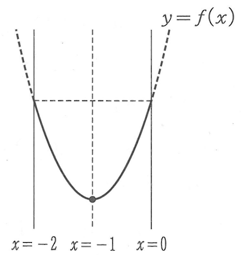
の頂点の座標は,

$$(p,\ q).$$

(2) $f(x)=a(x+1)^2-a+10$ とおく.

(i) $a>0$ のとき.

$$m=f(-1)=-a+10.$$



(ii) $a<0$ のとき.

$$m=f(-2)=f(0)=10.$$

よって, $m=-2$ となるのは,

$$a>0 \quad かつ \quad -a+10=-2$$

すなわち

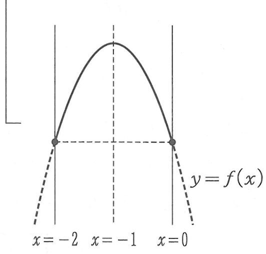
$$a=\boxed{12}$$

のときである.

$a\neq 0$ より, $-a+10\neq 10$ であることに注意すると, $m=10$ となるのは,

$$a<\boxed{0}$$

のときである.



(3) $a=12$ のとき，④より①は，

$$y=12(x+1)^2-2$$

と変形できる．よって，G と x 軸の交点の x 座標は，$y=0$ とすると，

$$0=12(x+1)^2-2$$

$$(x+1)^2=\frac{1}{6}$$

$$x+1=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

であるから，

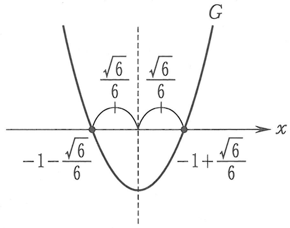
$$x=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

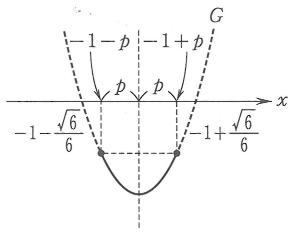
である．

したがって，$-1-p \leqq x \leqq -1+p$ において，つねに $ax^2+bx+c \leqq 0$ となるのは，$p>0$ に注意して，

$$0<p\leqq\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{6}}$$

のときである．





これは，

$$\begin{cases} f(-1+p)=12p^2-2\leqq 0, \\ p>0 \end{cases}$$

と考えてもよい．