第2回

1.

[1]. $\alpha = \dfrac{47}{3(4\sqrt{3}+1)}$

$16 \times 3 = 48$

$= \dfrac{47(4\sqrt{3}-1)}{3(4\sqrt{3}+1)(4\sqrt{3}-1)}$

$= \dfrac{47(4\sqrt{3}-1)}{3(48-1)}$

$= \dfrac{4\sqrt{3}-1}{3}$ ア～エ

(1) $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$, 7

$48 < 49$

$4\sqrt{3} < 7$ 1 オ.

$6 < 4\sqrt{3} < 7$

$5 < 4\sqrt{3} - 1 < 6$.

$\frac{5}{3} < \frac{4\sqrt{3}-1}{3} < 2$

$\alpha < 2$. 1 カ

(2). $(\alpha - 2)x < \alpha^2 - 4$.

$\alpha - 2 < 0$ より

$(\alpha-2)x < (\alpha-2)(\alpha+2)$

$x > \alpha + 2$.

$1 < \alpha < 2$ より.

$3 < \alpha + 2 < 4$. $\therefore x \leq 9$

6 コ.

[2]. $a + b\sqrt{5} = 1$ $(a, b$: 定数)

(1) 「$a \neq 1 \Rightarrow$ a, b 少なくとも一方は無理数」

逆 a, b 少なくとも一方は無 $\Rightarrow a \neq 1$. 1 ク —①

対偶 a, b ともに有 $\Rightarrow a = 1$ 2 ケ —②

(2). 命題の真偽は, ②の真偽と同じ

② より,

$a + b\sqrt{5} = 1$ が成りたつとき $b = 0$. かつ $a = 1$ より 真.

よって 命題も 真 0 コ.

① は

a, b 少なくとも一方は無 $\Rightarrow a \neq 1$

0

反例は 2 サ.

[3]. $a \neq 0$.

G: $y = ax^2 + bx + c$ —①

$(-2, 10)$, $(2, 10)$ を通る.

(1) $10 = c$.

$10 = 4a - 2b + 10$ $2b = 4a$ $b = 2a$ シ $c = 10$ スセ

$y = ax^2 + 2ax + 10$

$= a(x^2 + 2x) + 10$

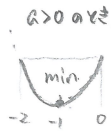
$= a\{(x+1)^2 - 1\} + 10$

$= a(x+1)^2 - a + 10$

頂 $(-1, -a+10)$ ソ～タ

(2). $-2 \leq x \leq 0$ のとき

$a > 0$ のとき



$m = -a + 10 = 2$.

$a = 12$ チ

$a < 0$ のとき

$m = 10$

$a < 0$ ツ

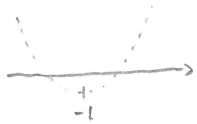
(3). $p > 0$. $a = 12$ のとき

$-1 - p \leq x \leq -1 + p$ において, つねに $ax^2 + 2ax + 10 \leq 0$.

$12x^2 + 24x + 10 \leq 0$

$6x^2 + 12x + 5 \leq 0$

$x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 30}}{6} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6}}{6}$.



$\dfrac{-6-\sqrt{6}}{6} \leq x \leq \dfrac{-6+\sqrt{6}}{6}$

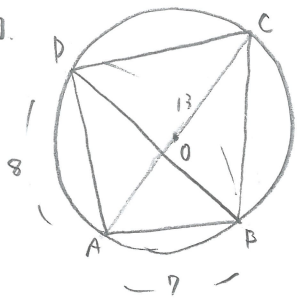
$-1 - \dfrac{\sqrt{6}}{6} \leq x \leq -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$-1 - p \leq x \leq -1 + p$ より

$0 < p \leq \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ネ.

【2】

【1】



(1) $\cos\angle DAB = \dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 8}$

$= \dfrac{49+64-169}{2\cdot 7\cdot 8}$

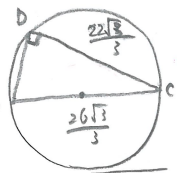
$= \dfrac{-56}{2\cdot 7\cdot 8} = \dfrac{-1}{2}$ アウ

$\sin\angle DAB = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ エオ

$2R = \dfrac{BD}{\sin\angle DAB}$

$R = \dfrac{13}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}} = \dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ カキク

(2) ACが最大 ⇒ ACが直径 $2R = \dfrac{26\sqrt{3}}{3}$



すなわち $\angle ADC = 90^\circ$ (三平方)

$CD = \sqrt{\left(\frac{26\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 8^2} = \sqrt{\frac{676}{3} - 64}$

$= \sqrt{\frac{676-192}{3}} = \sqrt{\frac{484}{3}}$

$= \dfrac{22}{\sqrt{3}} = \dfrac{22\sqrt{3}}{3}$ コサス

$S_{ACD} = \frac{1}{2}\times 8\times\frac{22\sqrt{3}}{3} = \dfrac{88\sqrt{3}}{3}$

内接円の半径 r とすると

$\frac{1}{2}r\left(\frac{26\sqrt{3}}{3}+\frac{22\sqrt{3}}{3}+8\right) = S_{ACD}$

$\frac{1}{2}r\left(\frac{48\sqrt{3}}{3}+8\right) = \frac{88\sqrt{3}}{3}$

$4r(2\sqrt{3}+1) = \frac{88\sqrt{3}}{3}$

$r = \dfrac{22\sqrt{3}}{3(2\sqrt{3}+1)} = \dfrac{22\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)}{3(12-1)}$

$= \dfrac{12-2\sqrt{3}}{3}$ セソツ

【2】

(ア) min: 2, 第1: 3.5, 第2: 4.5, 第3: 7, max 9

(イ) min: 1, 第1: 3.5, 第2: 5.5, 第3: 7.5, max 9

(1) 中央値(約) 4.5点 オ

(2) ⓪ × ① × ② ○ ③ × 2 カ

【3】 3.4, 7, 10.11.

(1)

	2014	2015
2 - 3	1	0
4 - 5	1	4
6 - 7	7 カ	5 キ
8 - 9	3	2
10 - 11	1	2
12 - 13	0	0
	13	13

⓪ ○
① ×
② ○
1 ケ

	'14	'15	
min	1.5	4	
第1	3.5	5	3.5/2
2	6.5	7	
3	8.5	8.5	
max	10.5	11	

$\frac{2.0}{2}$ ~ $\frac{2.0}{2}$

(2)

(i) $\dfrac{3.23}{4.69}$ / 2×6.42 (2.14) $= \dfrac{3.23}{4.28} = 0.76$ 3 コ

0.76
4.28) 13.23.0
2961
2690
2538

(ii) 0 シ

[4]

p, 8 : 素数

(1) $p=7$, $8=11$ のとき

$p^2=7^2$ の約数の総和

$7^0+7^1+7^2=1+7+49=$ 57 ケ

$13^8=13\times11$ の約数総和

$13^0\times11^0+13^0\times11^1+13^1\times11^0+13^1\times11^1$

$=1+11+13+143=$ 168 ケ

(2) p^2 の約数の総和 133.

13^8 〃 280

$p^0+p^1+p^2=p^2+p+1=133$

$p^2+p-132=0$

$(p+12)(p-11)=0$

$p=-12,\ 11.$ $p=$ 11 ケ.

$13^0\times8^0+13^1\times8^0+13^0\times8^1+13^1\times8^1=280$

$1+13+8+13\cdot8=280$

$14\cdot8=266$

$8=$ 19 ケ.

$\begin{cases} N=p^2x+p \\ N=13\cdot8y+13 \end{cases}$

$p^2x+p=13\cdot8y+13$

$p^2x-13\cdot8y=13-p$

$=13-11=$ 2 コ

$11^2x-13\times19y=2$

$121x-247y=2$

$247=121\times2+5$

$121=5\times24+1$

$5=247-121\times2$

$1=121-5\times24$

$=121-(247-121\times2)\times24$

$=121-247\times24+121\times48$

$=121\times49-247\times24$

$121\times49-247\times24=1$ 両辺×2

$121\times98-247\times48=2$

$-)\ 121x-247y=2$

$121(x-98)-247(y-48)=0$

$121(x-98)=247(y-48)$

$\begin{cases} x-98=247k \\ y-48=121k \end{cases}$

$\begin{cases} x=247k+98 \\ y=121k+48 \end{cases}$

$k=0$ のとき x が最小となる組 x, y は.

$x=$ 98 ケ, $y=$ 48 ケ

$N=p^2x+p=121x+11$ へ代入

$N=121(247k+98)+11$

$=11^2\cdot247k+11^2\cdot98+11$

$=11^2\cdot247k+11(11\cdot98+1)$

$=11^2\cdot247k+11\times1079$

$0\leqq N$ を満たす最小の k は

$11^2\cdot247k+11\times1079\geqq0$

$11\cdot247k\geqq-1079$

$k\geqq-\dfrac{1079}{11\times247}$

$k=0$ で最小.

3番目に小さいのは, $k=2$ のとき

$N=11^2\times247\times2+11\times1079$

$=11(11\times247\times2+1079)$

$=11\times6513=71643$

$3^{10}=59049$ $3^{11}>71643$

よって 11 ケ

3.

(i)	1, 2	Pは+1	$\frac{1}{3}$
(ii)	3, 4	Pは+2	$\frac{1}{3}$
(iii)	5, 6	Pは+3	$\frac{1}{3}$
(iv)	4にとまったら…	0に戻る	

(1) 2回ふる.

出る6　+3 → +3.

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ アイ.

出る5　+2 → +3 / +3 → +2.

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{9}$ ウエ

出る0　+1 → +3 / +3 → +1

+2 → +2

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ オカ

(2) 3回ふる.

0点　+1, +1, +2.

$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 3(!)=\frac{1}{27}\times 3=\frac{1}{9}$ キク

(3) 4回ふる.

4回とも1か2の目 $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$ ケコ

0点　+1, +1, +1, +1

+2, +2	+2+2
+1, +3	+1+3

(i) +2, +2, +2, +2

$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(ii)

+1+3	+1+3
+3+1	+3+1

$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2$

$=\frac{4}{81}$

(iii)

+2+2	+1+3
+1+3	+3+1
+3+1	+2+2

$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\frac{2}{81}+\frac{2}{81}=\frac{4}{81}$

(iv) +1, +1, +1, +1

$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(i)〜(iv)より

$\frac{1+4+4+1}{81}=\frac{10}{81}$ ユヨリ

(4) 5回ふる.

3点

(i) 2回ふって0点　3だけ3回出ればよい.

(1)より $\frac{1}{3}$　・+1, +1, +1

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{81}$

(ii) 3回ふって0点　3が2回で3点

(3)より $\frac{1}{9}$　・+1+2.　+2+1.

$\frac{1}{9}\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2\right\}=\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{81}$

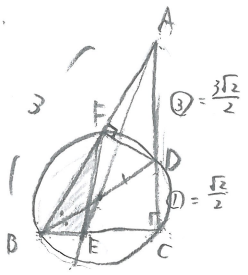
(iii) 4回ふって0点　3が1回で3点.

$\frac{10}{81}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{243}$

(i)〜(iii)より

$\frac{1}{81}+\frac{2}{81}+\frac{10}{243}=\frac{3+6+10}{243}=\frac{19}{243}$ タント.

【1】



$AC = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{9-1} = \underline{2\sqrt{2}}$ 答

$AD = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{2} = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ ウ〜オ

$CD = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ カ・キ

$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$

$= \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$OB = OD = \frac{1}{2}BD = \underline{\frac{\sqrt{6}}{4}}$ クケ

メネラウスより

$\frac{AD}{CA} \cdot \frac{OB}{DO} \cdot \frac{EC}{BE} = 1$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{EC}{BE} = 1$

$\frac{BE}{EC} = \underline{\frac{3}{4}}$ コサ

BE : EC = 3 : 4

△ABC ∽ △ADF より

AB : AD = AC : AF

$3 : \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} : AF$

$3AF = 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$AF = 2$

AF : FB = 2 : (3 − 2) = 2 : 1

$\triangle EFB = 1 \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

$\frac{S_{EFB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{7}}{1} = \underline{\frac{1}{7}}$ シス