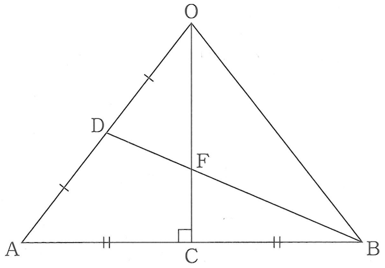
第5問　図形の性質

(1)



$\triangle$OAB は OA＝OB の二等辺三角形であることと，C は辺 AB の中点であるから，

$$\angle \mathrm{OCA} = \boxed{90}^\circ$$

であり，直角三角形 OAC に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{OC} &= \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AC}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{\boxed{10}}\end{aligned}$$

である．

⬅ OA＝4（円 O の半径），
$\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

また，F は $\triangle$OAB の中線 OC と中線 BD の交点であるから，$\triangle$OAB の重心である．よって，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

⬅ 三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を中線という．また，三角形の三つの中線は1点で交わり，その点を三角形の重心という．

したがって，

$$\mathrm{OF} : \mathrm{FC} = 2 : 1$$

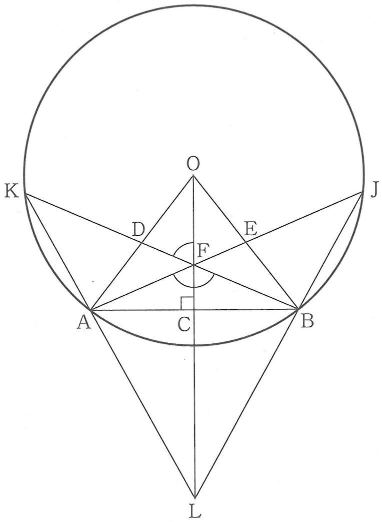
であるから，

⬅ 三角形の重心は各中線を 2:1 に内分する．

$$\mathrm{OF} = \frac{2}{3}\mathrm{OC} = \frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{3}}$$

である．

(2)



直線FCは辺ABの垂直二等分線であるから，△BFC≡△AFC であり，

$$\angle BFC = \angle AFC$$

である．また，

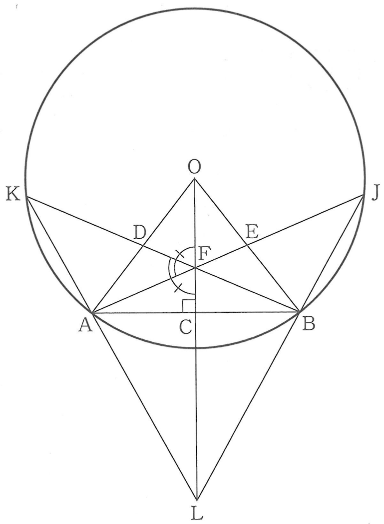
$$\angle BFC = \angle OFD \text{（対頂角）}$$

であるから，

$$\angle BFC = \angle AFC = \angle OFD$$

である．

したがって，$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$，$\boxed{③}$ である．



$$\angle AFC = \angle OFD$$

であるから，

$$\angle AFC + \angle AFD = \angle OFD + \angle AFD$$

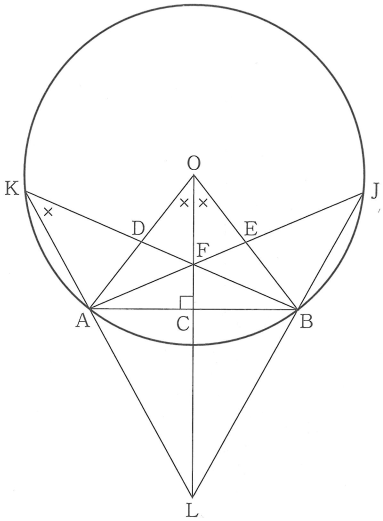
$$\angle DFC = \angle OFA$$

← 両辺に ∠AFD を加えた．

すなわち

$$\angle \mathrm{KFL} = \angle \mathrm{OFA} \qquad \cdots ①$$

である．



次に，直線 OC は辺 AB の垂直二等分線であるから，$\triangle \mathrm{BOC} \equiv \triangle \mathrm{AOC}$ であり，

$$\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{AOC}$$

である．また，

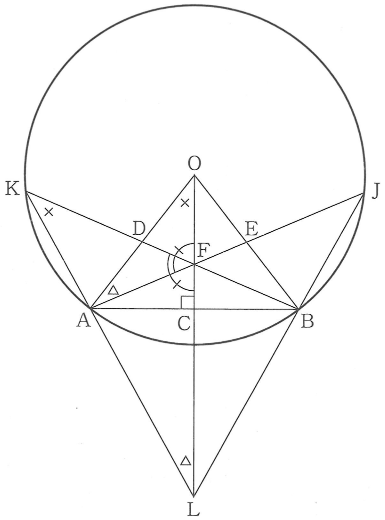
$$\angle \mathrm{AKB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}\ \text{（円周角と中心角の関係）}$$

であるから，

$$\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{AKB} \qquad \cdots ②$$

である．

したがって，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$，$\boxed{⑥}$ である．

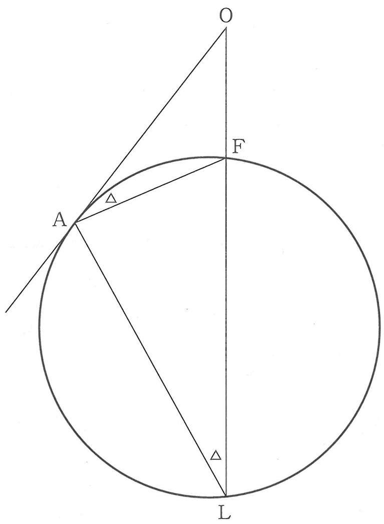


$\triangle OAF$ と $\triangle KLF$ に着目すると，三角形の内角の和が $180°$ であることと①，②より，

$$\angle OAF = \angle KLF \qquad \cdots ③$$

である．

(3) ③より，接線と弦の作る角の定理の逆から，直線 OA は $\triangle AFL$ の外接円に接する．



方べきの定理より，

$$OF \cdot OL = OA^2$$

であり，$OF = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$，$OA = 4$ であるから，

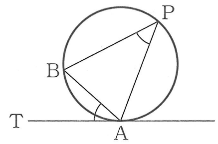
$$\frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot OL = 4^2$$

すなわち

$$OL = \frac{\boxed{12}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{5}}$$

である．

接線と弦の作る角の定理とその逆

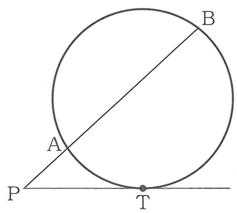


直線 AT が円の接線のとき，

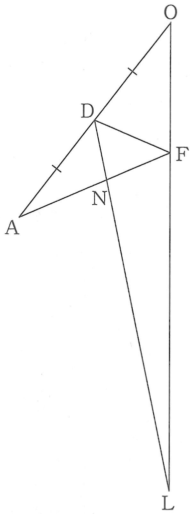
$\angle BAT = \angle APB$.

逆に，$\angle BAT = \angle APB$ のとき，直線 AT は円の A における接線である．

方べきの定理



$PA \cdot PB = PT^2$（T は接点）．



△AFO と直線 DL にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NF}}\cdot\frac{\mathrm{FL}}{\mathrm{LO}}\cdot\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}=1$$

であり，

$$\mathrm{FL}=\mathrm{OL}-\mathrm{OF}=\frac{12\sqrt{10}}{5}-\frac{2\sqrt{10}}{3}=\frac{26\sqrt{10}}{15}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NF}}\cdot\frac{\frac{26\sqrt{10}}{15}}{\frac{12\sqrt{10}}{5}}\cdot\frac{1}{1}=1$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NF}}=\frac{\boxed{18}}{\boxed{13}}$$

である．

（注 1） $\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ の選択肢について．

△OBF に注目すると，

$$\angle\mathrm{BOF}+\angle\mathrm{OBF}=\angle\mathrm{BFC}$$

すなわち

$$\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{OBF}=\angle\mathrm{BFC}$$

が成り立つから，

$$\angle\mathrm{BOC}\neq\angle\mathrm{BFC}$$

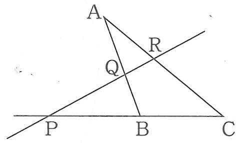
となり，①は不適である．

また，

$$\angle\mathrm{BFC}<90^\circ<\angle\mathrm{OFB}$$

であるから，②は不適である．

メネラウスの定理



$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1.$$

D は辺 OA の中点であるから，

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}=\frac{1}{1}.$$

（注２） $\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の選択肢について．

$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{OBD}$ とすると，$\triangle\mathrm{OFB}$ は $\mathrm{FO}=\mathrm{FB}$ の二等辺三角形となる．このことと $\mathrm{FA}=\mathrm{FB}$ より，

$$\mathrm{FO}=\mathrm{FA}=\mathrm{FB}$$

となるから，F は $\triangle\mathrm{OAB}$ の外心である．しかし，$\triangle\mathrm{OAB}$ は正三角形ではないから，重心 F が外心と一致することはない．よって，

$$\angle\mathrm{BOC}\fallingdotseq\angle\mathrm{OBD}$$

となり，④は不適である．

また，$\triangle\mathrm{FOD}$ と $\triangle\mathrm{FAC}$ において，

$$\angle\mathrm{OFD}=\angle\mathrm{AFC},\quad \angle\mathrm{ODF}\fallingdotseq\angle\mathrm{ACF}\ (=90^\circ)$$

であるから，

$$\angle\mathrm{FOD}\fallingdotseq\angle\mathrm{FAC} \qquad \cdots(*)$$

であり，$\angle\mathrm{FOD}=\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}$，$\angle\mathrm{FAC}=\angle\mathrm{BAE}$ であるから，$(*)$ は，

$$\angle\mathrm{BOC}\fallingdotseq\angle\mathrm{BAE}$$

となり，⑦は不適である．