第4問　整数の性質

(1)　$x=720$ のとき，x を素因数分解すると，

$$x=2^{\boxed{4}}\cdot 3^{\boxed{2}}\cdot 5 \quad \cdots ①$$

である．

$y=12600$ のとき，y を素因数分解すると，

$$y=2^{\boxed{3}}\cdot 3^2\cdot 5^{\boxed{2}}\cdot 7 \quad \cdots ②$$

である．

したがって，x と y の最大公約数 G は，

$$G=2^{\boxed{3}}\cdot 3^2\cdot \boxed{5} \quad \cdots ③$$

である．

また，x と y の最小公倍数 L は，

$$L=2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7 \quad \cdots ④$$

である．

①，②，③，④ より，

$$xy=LG$$

が成り立つ．

よって，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

(2)　$xy=7371$，$L=819$ のとき，$xy=LG$ が成り立つから，

$$7371=819G$$

すなわち

$$G=\boxed{9}$$

である．

x，y は，$x<y$ であることに注意すると，互いに素である自然数 a，b $(a<b)$ を用いて，

$$x=9a,\quad y=9b$$

と表すことができるから，

$$xy=81ab$$

である．

$xy=7371$ より，

$$7371=81ab$$

すなわち

$$ab=\boxed{91}$$

である．

これを満たす互いに素である自然数 $(a,\ b)$ の組は，$a<b$ に注意して，

$$(a,\ b)=(1,\ 91),\ (7,\ 13)$$

であるから，自然数 $(x,\ y)$ の組は，

$$(x,\ y)=(\boxed{9},\ \boxed{819}),\ (\boxed{63},\ \boxed{117})$$

素因数分解

2以上の自然数 N は，

$$N=p^{\ell}\cdot q^m\cdot r^n\cdot\cdots$$

(p，q，r，$\cdots$ は素数，

ℓ，m，n，$\cdots$ は自然数)

のように素数の積で1通りに表される．これを素因数分解という．

$$\begin{array}{r|l} 2 & 720 \\ 2 & 360 \\ 2 & 180 \\ 2 & 90 \\ 3 & 45 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array}$$

よって，

$$x=2^4\cdot 3^2\cdot 5.$$

$$x=2^4\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^0,$$
$$y=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^1$$

より，

$$G=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^0,$$

(指数の小さい方を選ぶ)

$$L=2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^1.$$

(指数の大きい方を選ぶ)

自然数 n に対して，

$$n^0=1.$$

一般に，自然数 x，y の最小公倍数と最大公約数をそれぞれ L，G とすると，

$$x=aG,\quad y=bG,\quad L=abG$$

(a，b は互いに素である自然数)

と表すことができるから，

$$xy=LG$$

が成り立つ．

$x=9a$ と $y=9b$ の辺々を掛けた．

$$ab=91=7\cdot 13$$

と素因数分解できることを利用した．

$$(a,\ b)=(1,\ 91),\ (7,\ 13)$$

をそれぞれ $x=9a$，$y=9b$ に代入した．

である．

(3)　$G=12$ のとき，x，y は互いに素である自然数 a，b $(a<b)$ を用いて，

$$x=12a,\quad y=12b$$

と表すことができるから，

$$xy=144ab \qquad \cdots ⑤$$

である．

$4000<xy<5000$ より，

$$4000<144ab<5000$$

すなわち

$$27+\frac{112}{144}<ab<34+\frac{104}{144}$$

であり，ab は自然数であるから，

$$28 \leqq ab \leqq 34$$

である．

← ab は 28 以上 34 以下の自然数である．

このとき，自然数 $(a,\ b)$ の組と自然数 $(x,\ y)$ の組の数は次表のようになる．

ab	$(a,\ b)$ の組	$(x,\ y)$ の組の数
28	$(1,\ 28)$，$(4,\ 7)$	2
29	$(1,\ 29)$	1
30	$(1,\ 30)$，$(2,\ 15)$，$(3,\ 10)$，$(5,\ 6)$	4
31	$(1,\ 31)$	1
32	$(1,\ 32)$	1
33	$(1,\ 33)$，$(3,\ 11)$	2
34	$(1,\ 34)$，$(2,\ 17)$	2

← $x=12a$，$y=12b$ であるから，$(a,\ b)$ の組一つに対して $(x,\ y)$ の組も一つ存在し，$(a,\ b)$ の組が異なれば，$(x,\ y)$ の組も異なる．

よって，$(x,\ y)$ の組の数は $(a,\ b)$ の組の数に等しい．

← $ab=28$ のとき，$(a,\ b)=(2,\ 14)$ は a，b が互いに素ではないから考えなくてよい．

← $ab=32$ のとき，$(a,\ b)=(1,\ 32)$ 以外は a，b が互いに素ではないから考えなくてよい．

よって，$4000<xy<5000$，$G=12$ を満たすような自然数 $(x,\ y)$ の組は $\boxed{13}$ 組ある．

また，$(x,\ y)$ の組の数が最も多いのは $ab=30$ のときであり，そのときの xy の値は，⑤より，

$$xy=144\cdot 30=\boxed{4320}$$

である．

← $ab=30$ のとき，$(x,\ y)$ の組は 4 組あり，最も多い．