第1問　数と式，命題，2次関数

〔1〕

2次方程式 $x^2-5x+1=0$ を解くと，

$$x=\frac{\boxed{5}\pm\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{2}}$$

である．

⬅ x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

α はこのうちの大きい方であるから，

$$\alpha=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

である．

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{2}{5+\sqrt{21}}\\&=\frac{2(5-\sqrt{21})}{(5+\sqrt{21})(5-\sqrt{21})}\\&=\frac{2(5-\sqrt{21})}{5^2-(\sqrt{21})^2}\\&=\frac{\boxed{5}-\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．

⬅ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(2)

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{5+\sqrt{21}}{2}+\frac{5-\sqrt{21}}{2}=5$$

であるから，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}&=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\\&=5^2-2\\&=\boxed{23}\end{aligned}$$

である．

⬅ $$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

であるから，

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

⬅ $$\begin{aligned}\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}&=\alpha^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\\&=\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2+\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^2\\&=\frac{46+10\sqrt{21}}{4}+\frac{46-10\sqrt{21}}{4}\\&=23\end{aligned}$$

としてもよい．

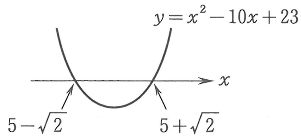
〔2〕

$$p: x^2-10x+23\leqq 0$$
$$q: |x-1|\geqq 4$$
$$r: 1-a<x<1+a\quad(a>0)$$

(1)　2次不等式 $x^2-10x+23\leqq 0$ を解くと，

$$\boxed{5}-\sqrt{\boxed{2}}\leqq x\leqq 5+\sqrt{2}$$

である．

⬅ 

また，不等式 $|x-1|\geqq 4$ を解くと，

$$x-1\leqq -4,\quad 4\leqq x-1$$

$$x\leqq\boxed{-3},\quad \boxed{5}\leqq x$$

である．

⬅ $|X|\geqq k$ (k は正の数)のとき，

$$X\leqq -k,\quad k\leqq X.$$

(2) 命題「$\overline{r} \Longrightarrow (p$ または $q)$」の対偶は,

$$\left(\overline{p\ \text{または}\ q}\right) \Longrightarrow \overline{\overline{r}}$$

すなわち

$$\left(\overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}\right) \Longrightarrow r$$

であるから, $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である.

⬅ 命題「$s \Longrightarrow t$」の対偶は,

$$\overline{t} \Longrightarrow \overline{s}.$$

⬅ ド・モルガンの法則

$$\overline{s\ \text{かつ}\ t} \Longleftrightarrow \overline{s}\ \text{または}\ \overline{t},$$

$$\overline{s\ \text{または}\ t} \Longleftrightarrow \overline{s}\ \text{かつ}\ \overline{t}.$$

$$\overline{\overline{r}} \Longleftrightarrow r.$$

(3) $(p$ または $q)$ が $\overline{r}$ であるための必要条件であるが, 十分条件ではないのは,

$$\begin{cases} (p\ \text{または}\ q) \Longrightarrow \overline{r} & \text{は偽,} \\ (p\ \text{または}\ q) \Longleftarrow \overline{r} & \text{は真} \end{cases}$$

となるときである.

⬅ 命題「$s \Longrightarrow t$」が偽,「$s \Longleftarrow t$」が真であるとき, s は t であるための必要条件であるが, 十分条件ではない.

このそれぞれの対偶を考えて,

$$\begin{cases} r \Longrightarrow (\overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}) & \text{は偽,} \\ r \Longleftarrow (\overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}) & \text{は真} \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

となるときを考えればよい.

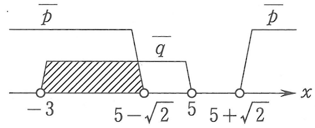
⬅ 命題とその対偶は, 真偽が一致する.

$(\overline{p}$ かつ $\overline{q})$ を満たす x は,

「$x<5-\sqrt{2},\ 5+\sqrt{2}<x$」 かつ 「$-3<x<5$」

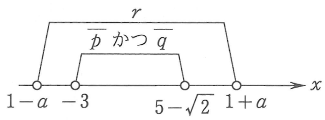
すなわち

$$-3<x<5-\sqrt{2}$$

⬅ 

であるから, $(*)$ が成り立つための a の条件は,

$$\begin{cases} 1-a \leqq -3 \\ 5-\sqrt{2} < 1+a, \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 1-a < -3 \\ 5-\sqrt{2} \leqq 1+a \end{cases}$$

⬅ 

すなわち

$$a \geqq 4 \quad \text{または} \quad a>4$$

である.

よって, 求める a の値の範囲は,

$$a \geqq \boxed{4}$$

である.

[3]

$$\begin{aligned} G_1 : y &= x^2-2x+2 \\ &= (x-1)^2-1^2+2 \\ &= (x-1)^2+1 \end{aligned}$$

であるから, G_1 の頂点の座標は,

$$(\boxed{1},\ \boxed{1})$$

である.

⬅ 放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は,

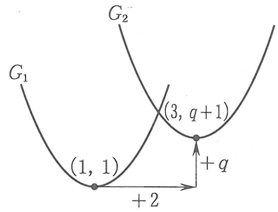
$$(p,\ q).$$

(1) G_1 を x 軸方向に 2，y 軸方向に q だけ平行移動して得られるグラフ G_2 の頂点の座標は，

$$(1+2,\ 1+q)$$

すなわち

$$(3,\ q+1)$$



であるから，G_2 の方程式は，

$$y=\left(x-\boxed{3}\right)^2+q+1 \qquad \cdots ①$$

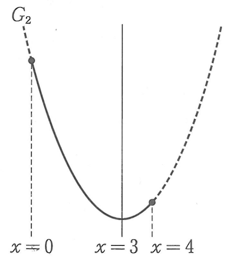
と表せる．

2 次関数のグラフを平行移動しても x^2 の係数は変わらない．

関数 ① の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値を考える．

$x=0$ のとき最大となるから，最大値は，

$$\begin{aligned} y&=(0-3)^2+q+1 \\ &=q+10 \end{aligned}$$



である．

よって，最大値が 7 になるのは，

$$q+10=7$$

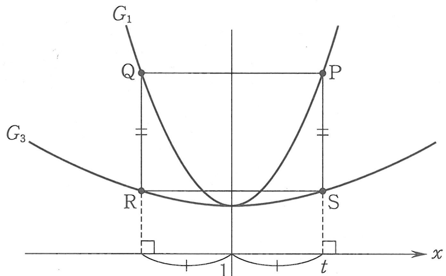
すなわち

$$q=\boxed{-3}$$

のときである．

(2) $$G_3: y=\frac{1}{3}(x-1)^2+1.$$

与えられた条件より，長方形 PQRS は次図のようになる．



G_1 と G_3 はともに頂点の座標が $(1,\ 1)$ である．

P の x 座標が t より，S の x 座標も t となるから，P，S の座標はそれぞれ，

$$\mathrm{P}(t,\ (t-1)^2+1),\ \mathrm{S}\left(t,\ \frac{1}{3}(t-1)^2+1\right)$$

となる．

$G_1: y=(x-1)^2+1.$

よって，辺 PS の長さは，

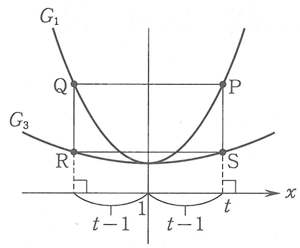
$$\begin{aligned} \mathrm{PS}&=\{(t-1)^2+1\}-\left\{\frac{1}{3}(t-1)^2+1\right\} \\ &=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}(t-1)^2 \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

である．

また，G_1 と G_3 はともに軸：$x=1$ に関して対称であるから，辺 SR の長さは，$t>1$ より，

$$SR=2(t-1) \qquad \cdots ③$$

である．



四角形 PQRS が正方形となるのは，

$$PS=SR$$

のときである．

②，③ より，

$$\frac{2}{3}(t-1)^2=2(t-1)$$

であり，$t \neq 1$ より，

$$\frac{1}{3}(t-1)=1$$

$$t-1=3$$

すなわち

$$t=\boxed{4}$$

のときである．