第1回

I.

[1]. $x^2-5x+1=0$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ ア〜エ.

$\alpha=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ とする.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{2}{5+\sqrt{21}}=\dfrac{2(5-\sqrt{21})}{25-21}$

$=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ オ〜ク.

(2). $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2$

$=\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}+\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^2-2$

$=5^2-2=25-2$

$=23$ ケコ

[2]. $\alpha>0$.

$P: x^2-10x+23\leqq 0$

$x=5\pm\sqrt{25-23}$

$=5\pm\sqrt{2}$

$5-\sqrt{2}\leqq x\leqq 5+\sqrt{2}$ ⓟ

$q: |x-1|\geqq 4$

$x-1\leqq -4,\ 4\leqq x-1$

$x\leqq -3,\ 5\leqq x$ ⓠ

$r: 1-a<x<1+a$

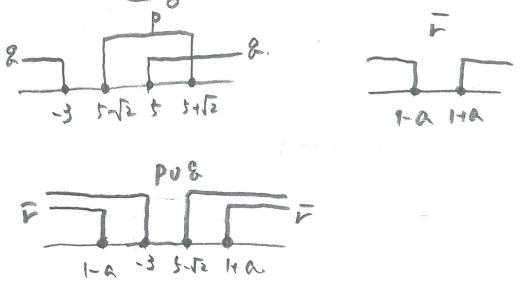
(1). $5-\sqrt{2}\leqq x\leqq 5+\sqrt{2}$ サシ

$x\leqq -3,\ 5\leqq x$ スセ〜ソ

(2). $\bar{r}\Rightarrow p\cup q$. の対偶は

$\bar{p}\cap\bar{q}\Rightarrow r$ ③.

(3) $p\cup q \overset{\times}{\underset{\circ}{\Rightarrow}} \bar{r}$



$(1-a\leqq -3)\cap(5-\sqrt{2}\leqq 1+a)$

$(4\leqq a)\cap(4-\sqrt{2}\leqq a)\Rightarrow a\geqq 4$ チ.

[3]. $y=x^2-2x+2$: G_1

$=(x-1)^2-1+2$

$=(x-1)+1$.

頂点 $(1,1)$ ツテ.

(1) G_2 頂点 $(3,1+q)$

$g(x)$ $y=(x-3)^2+q+1$ — ①

$g(0)=3^2+q+1$

$=q+10=7$

$q=-3$ トナ=

(2). $G_3: y=\dfrac{1}{3}(x-1)^2+1$

$\left[\begin{array}{l}P(t,\ t^2-2t+2)\\ S(t,\ \frac{1}{3}(t-1)^2+1)\end{array}\right]$

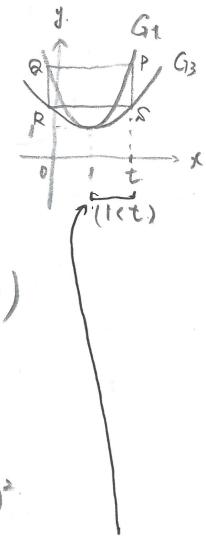
$PS=t^2-2t+2-\left\{\dfrac{1}{3}(t-1)^2+1\right\}$

$=t^2-2t+2-\left(\dfrac{1}{3}t^2-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{3}+1\right)$

$=t^2-2t+2-\dfrac{1}{3}t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{4}{3}$

$=\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{2}{3}$.

$=\dfrac{2}{3}(t^2-2t+1)=\dfrac{2}{3}(t-1)^2$ ヌネ



Pの x 座標を t とおくと, $PQ=(t-1)\times 2=2(t-1)$

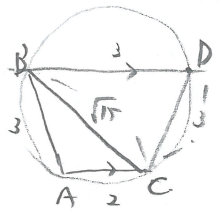
正方形となるとき, $\dfrac{2}{3}(t-1)^2=2(t-1)$

$\dfrac{1}{3}(t-1)^2-(t-1)=0$ $(t-1)\left\{\dfrac{1}{3}(t-1)-1\right\}=0$ $t\neq 1$ より

$\dfrac{1}{3}(t-1)-1=0$ $\dfrac{1}{3}(t-1)=1$. $t-1=3$ $t=4$ ハ.

2

[1].



$\cos A = -\frac{1}{6}$

$BC^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$

$= 4 + 9 + 2 = 15$

$BC = \sqrt{15}$ ア

$\sin\angle BAC = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^2}$

$= \sqrt{1+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{35}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$ ウエオ

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{2}$ カキク

円の性質より、ABDCは台形となり

$CD = AB = 3$ ケ.

$\cos\angle BDC = -\cos\angle BAC = \frac{1}{6}$

$BD = x$ とおくと

$\cos\angle BDC = \frac{3^2 + x^2 - \sqrt{15}^2}{2\cdot 3\cdot x}$

$\frac{1}{6} = \frac{x^2-6}{6x}$

$x = x^2 - 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3, -2$. $BD = 3$

$\sin\angle BDC = \sin\angle BAC = \frac{\sqrt{35}}{6}$

$S_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{3\sqrt{35}}{4}$ コサ

[2]. 20人.

①回目 min 16. max 83

第1四分位: $\frac{41+46}{2} = 43.5$.

第2四分位: $\frac{51+53}{2} = 52$.

第3四分位: $\frac{60+64}{2} = 62$.

② P.

②回目 min 29. max 90

① ソ

[3]. 21人 - Ave 58.0kg.

(1) 中央値 11人目. 58.0kg. ② タ $= Q_2$.

(2) Q_1: 5, 6人目 Ave. 50kg ② チ

Q_3: 16, 17人目 Ave. $\frac{64+65}{2} = 64.5$kg ⑥ ツ

(3).

40-45	1
45-50	3
50-55	4
55-60	3
60-65	4
65-70	3
70-75	1
75-80	1

③ テ.

(4). $\frac{54+62}{2} = \frac{116}{2} = 58$.

V_0 と V_1 の平均は変わらず 58kg

$21V_0 - 19V_0 = (54-58)^2 + (62-58)^2$

$= (-4)^2 + (4)^2 = 16+16 = 32$ トナ

3.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

(1) 赤 or 青

(i) $2^9 = 512$ 通り

(ii) 1区画赤 … 9通り

3 〃 赤 …

区画 … ${}_9C_3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$ 通り

5 〃 赤

区画 … ${}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 126$ 通り

7 〃 赤

${}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9\cdot8}{2\cdot1} = 36$ 通り

9 〃 赤 1通り

(赤) 奇数区画.

$9 + 84 + 126 + 36 + 1 = 256$ 通り

(2) 赤 or 青 or 黄 Eに対称

[A=I, B=H, C=G, D=F]

(i) 赤1, 青4, 黄4.

E 赤 ○

A~D 4ヶ所のうち2つが青で2つが黄

${}_4C_2 = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6$ 通り

(ii) 赤3. EとA~Dのうち1つ → 4通り.

残り3ヶ所 青or黄 $2^3 = 8$

$4 \times 8 = 32$ 通り

赤5 EとA~Dのうち2つ

${}_4C_2 = 6$.

残り2ヶ所 青or黄 $2^2 = 4$

$6 \times 4 = 24$ 通り

赤7 EとA~Dのうち3つ.

${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

残り1ヶ所 青or黄 $2^1 = 2$

$4 \times 2 = 8$ 通り

赤9 1通り

赤1 E赤 A~Dが青or黄

$2^4 = 16$.

赤奇数

$32 + 24 + 8 + 1 + 16 = 81$ 通り

4

自然数 x, y $(x<y)$

x と y の

最小公倍数：L、

最大公約数：G

(1)

$x = 720$

$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ アイ

$y = 12600$

$= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ ウエ

$G = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ オカ

$L = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$xy = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$

$= (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7)$

$= GL$ ① キ

(2) $xy = 7371$, $L = 819$

$xy = GL$ より

$7371 = G \cdot 819$

$G = 9$ ク

$x = 9a$, $y = 9b$ と表す

$L = 9ab$ より

$819 = 9ab$

$ab = 91$ ケコ

$(a, b) = (1, 91), (7, 13)$ より

$(x, y) = (9, 819), (63, 117)$ サ〜テ

(3) $4000 < xy < 5000$, $G = 12$

$x = 12a$, $y = 12b$ とすると $(a<b)$

$xy = 12^2ab = 144ab$

$4000 < 144ab < 5000$

$28 \leqq ab \leqq 34$

28 … (1, 28), (4, 7)

29 … (1, 29)

30 … (1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

31 … (1, 31)

32 … (1, 32)

33 … (1, 33), (3, 11)

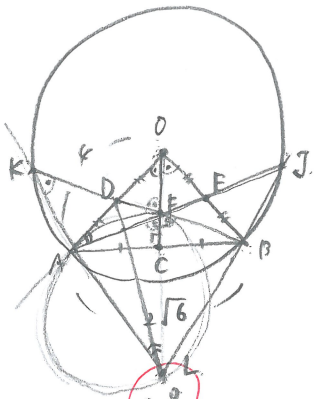
34 … (1, 34), (2, 17)

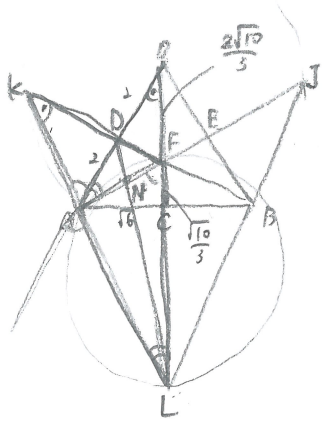
(x, y) の組は 13 組 トナ

$ab = 30$ のとき 最大 4 個 出るため

$xy = 144 \times 30 = 4320$ ニ〜ノ

[5].





(1) $\angle OCA = 90^\circ$ 円.

$OC = \sqrt{4^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{16-6} = \sqrt{10}$ cm

F は △OAB の 重心 ② 点.

$OF = \frac{2}{3}OC = \frac{2}{3} \times \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ cm

(2) $\angle BFC = \angle AFC$ ⓪ $= \angle OFD$ ③ より

$\angle KFL = \angle OFA$

よって

$\angle BOC = \angle AOC$ ⑤ $= \angle AKB$ ⑥

$\angle OAF = \angle KLF$.

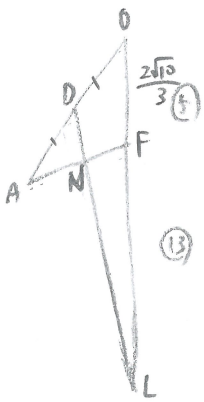
(3) 方べきの定理より

$OA^2 = OF \cdot OL$

$4^2 = \frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot OL$

$OL = 8\sqrt{10} \cdot \frac{3}{2\sqrt{10}}$

$= \frac{12}{2\sqrt{10}} \times \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$ cm.



$OF : OL = \frac{2\sqrt{10}}{3} : \frac{12\sqrt{10}}{5}$

$= 5 : 18$

メネラウスより

$\frac{LF}{OL} \cdot \frac{NA}{FN} \cdot \frac{DO}{AD} = 1$

$\frac{13}{18} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{1}{1} = 1$

$\frac{AN}{NF} = \frac{18}{13}$ 下の=