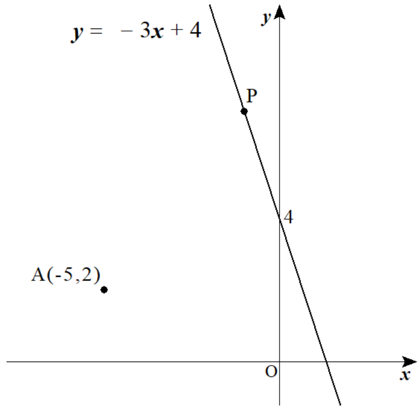
$\boxed{25}$

$3x+y-4=0$ を移項して y について変形すると、 $y=-3x+4$ となる。
そして、それと点 A をグラフに表すと右のように表せる。
まずはこの準備をしてから問題にとりかかろう。



(1) 点 P の x 座標を t と表す。

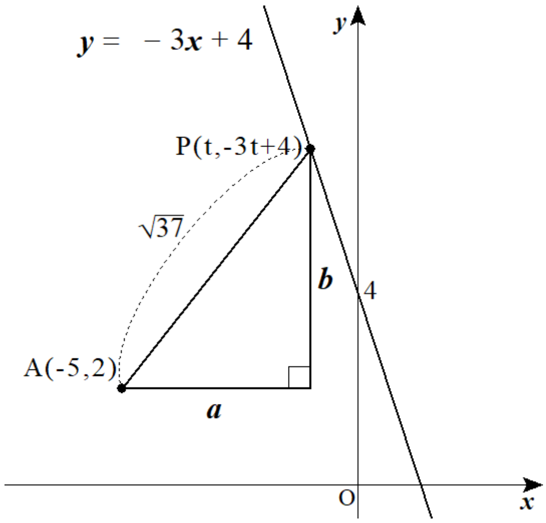
点 P は $y=-3x+4$ の直線上にあるから、

t を x へ代入することで、 $\underline{y=-3t+4}$ となり

座標は P$(t,-3t+4)$ と表せる。※ まずは (x,y) を t のみで表すことがこの問題を解く鍵になる

(2) P の座標を t で表せたら、AP を斜辺とする直角三角形をかき、

AP$=\sqrt{37}$ 、直角を作る 2 辺を a , b とグラフに書き込む。



a は A、P の x 座標の差、b は A、P の y 座標の差となるから、
$a=t-(-5)=t+5$ 、 $b=-3t+4-2=-3t+2$
となり、三平方の定理より、

$a^2+b^2=(\sqrt{37})^2$ から、

$(t+5)^2+(-3t+2)^2=37$
$t^2+10t+25+9t^2-12t+4=37$ 　　$10t^2-2t-8=0$
$5t^2-t-4=0$
$(t-1)(5t+4)=0$
$t-1=0$, $5t+4=0$ より、
$t=1$, $-\dfrac{4}{5}$

たすきがけ

5	-4	-1
1	-1	-5
5	4	4

$t=1$ のとき、
$-3t+4=-3\times1+4=-3+4=1$

$t=-\dfrac{4}{5}$ のとき、

$-3t+4=-3\times(-\dfrac{4}{5})+4=\dfrac{12}{5}+\dfrac{20}{5}=\dfrac{32}{5}$

以上より、P の座標は、$\underline{(1,1),\ (-\dfrac{4}{5},\dfrac{32}{5})}$

38

(1) ABC の面積を求めるためには、

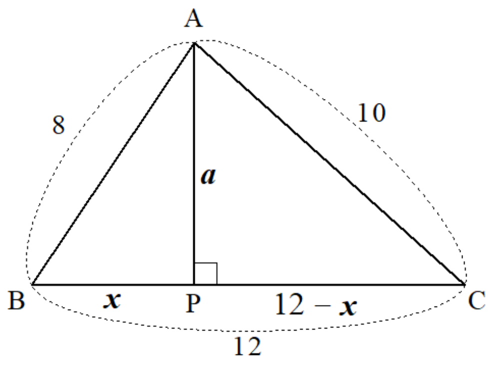
底辺(BC)に対して、高さ(AP)を求める必要がある。

※ そのためにまず、BP$=x$ とおくと、PC$=12-x$ となる。

それができたら、

左右それぞれの直角三角形について、AP$=a$ として、

三平方の定理を考える。



まず左の△ABP について、　　　右の△ACP について、

$x^2+a^2=8^2$ 　 $a^2=\boxed{64-x^2}$ 　　 $(12-x)^2+a^2=10^2$ 　 $a^2=\boxed{100-(12-x)^2}$

このふたつはそれぞれ AP^2 (a^2)についての式であるので、$\boxed{64-x^2}=\boxed{100-(12-x)^2}$となる。

これを解いて x を求めよう。

$64-x^2=100-(144-24x+x^2)$ 　 $64-x^2=100-144+24x-x^2$ 　 $24x=108$ 　 $x=\dfrac{9}{2}$

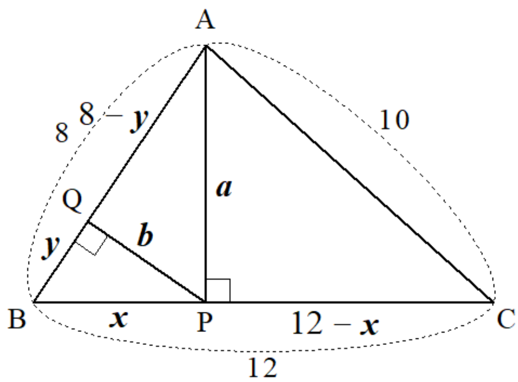
ここで、高さ a の算出に入る。

$a^2=64-x^2$ より、$a^2=64-\left(\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{256}{4}-\dfrac{81}{4}=\dfrac{175}{4}$ 　 $a>0$ より、$a=\dfrac{\sqrt{175}}{2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

これで高さも分かったので、△ABC の面積を求めることができる。 $12\times\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\underline{15\sqrt{7}}$

(2) PQ の長さも、AP を求めたとき同様に考えればよい。

BQ$=y$、AQ$=8-y$、PQ$=b$ として、



△BPQ を、$b^2+y^2=x^2$ 　 $b^2=x^2-y^2=\left(\dfrac{9}{2}\right)^2-y^2=\boxed{\dfrac{81}{4}-y^2}$

△APQ を、$b^2+(8-y)^2=a^2$

$$b^2=a^2-(8-y)^2=\left(\frac{5\sqrt{7}}{2}\right)^2-(8-y)^2=\boxed{\frac{175}{4}-(8-y)^2}$$

$\dfrac{81}{4}-y^2=\dfrac{175}{4}-(8-y)^2$ を計算する。

$\dfrac{81}{4}-y^2=\dfrac{175}{4}-(64-16y+y^2)$ 　 $\dfrac{81}{4}-y^2=\dfrac{175}{4}-64+16y-y^2$ 　 $16y=\dfrac{81}{2}$ 　 $y=\dfrac{81}{2}\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{81}{32}$

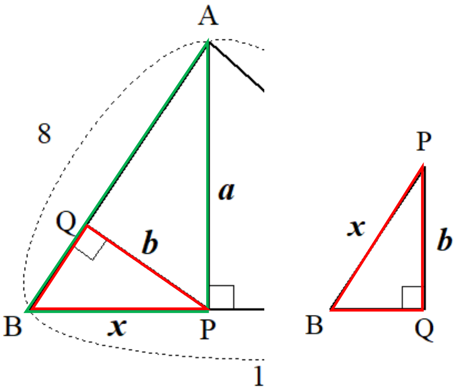
$b^2=\dfrac{81}{4}-\left(\dfrac{81}{32}\right)^2=\left(\dfrac{9}{2}\right)^2-\left(\dfrac{81}{32}\right)^2$ 　 ここで、$x^2-y^2=(x+y)\times(x-y)$ の考え方から計算をしてみよう。

$$=\left(\frac{9}{2}+\frac{81}{32}\right)\times\left(\frac{9}{2}-\frac{81}{32}\right)=\frac{144+81}{32}\times\frac{144-81}{32}=\frac{255}{32}\times\frac{63}{32}=\frac{15^2\times3^2\times7}{32^2}=\frac{45^2\times7}{32^2}$$

$b>0$ より、PQ$=\underline{\dfrac{45\sqrt{7}}{32}}$ 　 (別解は次のページ)

あとから平方根を考えるので、
2乗の形を作っておくと楽だよ。

別解

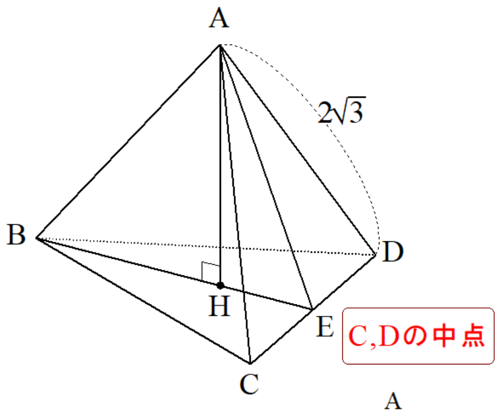


こっちの解き方の方がかなり楽なので、**相似な図形**に着目してやってみよう。
∠B が共通の角なので、△APB∽△PQB と分かる。
対応する辺から、
AB：PB＝AP：PQ　つまり、$8:x=a:b$ となるから、

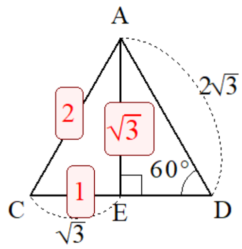
$$8b=ax \qquad b=ax\times\frac{1}{8}=\frac{5\sqrt{7}}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{8}=\underline{\frac{45\sqrt{7}}{32}}$$

この解き方の方が、前のページの解き方より圧倒的に簡単である。
しかし、相似な関係に気づくことができないと、この解法へたどり着けない。
この解説を参考に、様々な角度から図形の問題を見れる眼を養っていこう。

50

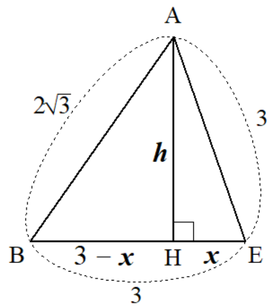


直線 BH と辺 BC の交点を E とすると、
正四面体の 4 つの面は全て正三角形であるから、交点 E は CD の中点。
A と E、B と E を結んでできる△ABE ができたら、
AH の大きさは、前のページと同様にすれば求められる。
まず、線分 AE、BE の大きさを求めよう。
さらにすべて合同な正三角形だから、AE＝BE であることが分かる。
△ACD の面を使って、AE の大きさを求めていこう。



直角三角形 ACE において、∠C＝60° であるから、CE：AC：AE＝$1:2:\sqrt{3}$ となる。

CE＝CD×$\frac{1}{2}=\sqrt{3}$ であるから、CE：AE＝$1:\sqrt{3}$　　$\sqrt{3}:$AE$=1:\sqrt{3}$　　AE＝BE＝3



となり、△ABE の三辺はそれぞれ右図のように書き込まれる。
EH＝x、BH＝$3-x$、AH＝h とおくと、

△ABH から、$h^2+(3-x)^2=(2\sqrt{3})^2$　　$h^2=12-(3-x)^2$

△AEH から、$x^2+h^2=3^2$　　$h^2=9-x^2$　　と表すことができるので、

$$9-x^2=12-(3-x)^2 \qquad 9-x^2=12-(9-6x+x^2) \qquad 9-x^2=12-9+6x-x^2 \qquad 6x=6 \qquad x=1$$

よって、$h^2=9-1=8$　　$h>0$ より、AH＝$2\sqrt{2}$

これで正四面体の体積を求めていける。

底面、△BCD の面積は、△ACD の図を参考にすると、$2\sqrt{3}\times3\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$

したがって、　$3\sqrt{3}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=\underline{2\sqrt{6}}$