[I].

C: $y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 4a + 3$.

$= (x-a)^2 - a^2 + 2a^2 + 4a + 3$

$= (x-a)^2 + a^2 + \underbrace{4}_{ア}a + \underbrace{3}_{イ}$.

(1). ・Cがx軸と2点で交わる.

⇒ 頂点y座標が負になる.

$a^2 + 4a + 3 < 0$.

$(a+1)(a+3) < 0$.

$\underbrace{-3}_{ウエ} < a < \underbrace{-1}_{オカ}$.

・x軸によって切りとられる線分が2.

解の公式. $y=0$ において.

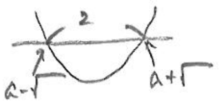
$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\cdot(2a^2+4a+3)}}{2}$$

$$= \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2 - 16a - 12}}{2}$$

$$= \frac{2a \pm \sqrt{-4a^2 - 16a - 12}}{2}$$

$$= \frac{2a \pm 2\sqrt{-a^2 - 4a - 3}}{2}$$

$$= a \pm \sqrt{-a^2 - 4a - 3}$$




$a + \sqrt{-a^2-4a-3} - (a - \sqrt{-a^2-4a-3}) = 2$.

$2\sqrt{-a^2-4a-3} = 2$.

$\sqrt{-a^2-4a-3} = 1$.

$-a^2 - 4a - 3 = 1$

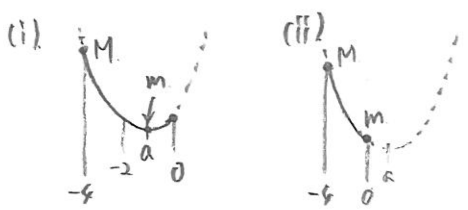
$a^2 + 4a + 4 = 0$

$(a+2)^2 = 0$

$a = \underbrace{-2}_{キク}$.

(2). $a \geqq -2$ とする.

頂点 $(a,\ a^2+4a+3)$ より




$-2 \leqq a < 0$.　　$0 \leqq a$

(i)(ii)より.

最大値 $M = f(-4) = (-4)^2 - 2a\times(-4) + 2a^2 + 4a + 3$

$= 16 + 8a + 2a^2 + 4a + 3$

$= \underbrace{2}_{ケ}a^2 + \underbrace{12}_{コサ}a + \underbrace{19}_{シス}$

(i)より.

$\underbrace{-2}_{セソ} \leqq a \leqq \underbrace{0}_{タ}$ のとき

最小値は頂点なので $m = a^2 + 4a + 3$

(ii)より.

$0 \leqq a$ のとき.

最小値 $m = f(0) = \underbrace{2}_{チ}a^2 + \underbrace{4}_{ツ}a + \underbrace{3}_{テ}$

$M(a) - m(a) = 12$ のとき

(i)より $2a^2 + 12a + 19 - (a^2 + 4a + 3) = 12$.

$a^2 + 8a + 16 = 12$.

$a^2 + 8a + 4 = 0$.

$a = -4 \pm \sqrt{16-4} = -4 \pm \sqrt{12} = -4 \pm 2\sqrt{3}$.

$3 < \sqrt{12} < 4$　　$-1 < -4 + \sqrt{12} < 0$.

$-2 \leqq a \leqq 0$ において適当.

(ii)より $2a^2 + 12a + 19 - (2a^2 + 4a + 3) = 12$.

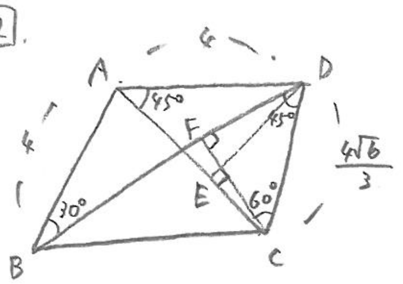
$8a + 16 = 12$

$8a = -4$　　$a = -\frac{1}{2}$

$0 \leqq a$ より. 不適

よって $a = \underbrace{2\sqrt{3}}_{トナ} - \underbrace{4}_{ニ}$

2.




△ABD は AB = DA, ∠ABD = 30° の二等辺三角形なので.

$\angle BAD = 120°$

$BD^2 = 4^2 + 4^2 - 2\times4\times4\times\cos120°$

$= 16 + 16 - 2\times4\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 16\times3 = 48$

$BD = \underline{4\sqrt{3}.}$ アイ.

$\angle ABD = \angle ADB = 30°$ より

$\angle ADC = 30° + 45° = 75°.$

$\angle ACD = 180° - (45° + 75°) = \underline{60°}$ ウエ

(正弦定理より)

$\frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}$

$CD = \frac{4}{\sin60°}\times\sin45°$

$= \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$ オ〜キ.

DからACへ下ろした垂線の交点をEとする.

$AE : AD = 1 : \sqrt{2}$ より

$AE : 4 = 1 : \sqrt{2}$

$\sqrt{2}AE = 4.$ $AE = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$

$CE : CD = 1 : 2$ より

$CE : \frac{4\sqrt{6}}{3} = 1 : 2.$

$2CE = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ $CE = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$

$AC = \underline{2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3}}$ ク〜シ

(正弦定理より)

$\frac{4}{\sin60°} = \frac{2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3.}}{\sin\angle ADC}$

$\sin\angle ADC = \left(2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4}$

$= \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \underline{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$ ス〜ソ

△ABDの面積

$\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin120° = \frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

△BCDの面積

CからBDへ下ろした垂線の交点をFとする.

$CF : CD = 1 : \sqrt{2}$ より

$CF : \frac{4\sqrt{6}}{3} = 1 : \sqrt{2}.$

$\sqrt{2}CF = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ $CF = \frac{4\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3.}$

面積 $= \frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\times3}{3} = 8$

△ACDの面積

$\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\sin60°.$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{6})\times4\sqrt{2}}{9} = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3}$

△ABCの面積

△ABD + △BCD − △ACD

$= 4\sqrt{3} + 8 - \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{12\sqrt{3} + 24 - 12 - 4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3} + 12}{3.}$

$\frac{8\sqrt{3} + 12}{3} \div \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3} = \frac{4(2\sqrt{3} + 3)}{3} \div \frac{4(\sqrt{3} + 3)}{3}$

$= \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 3} = \frac{(2\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} - 3)}{3 - 9}$

$= \frac{6 - 3\sqrt{3} - 9}{-6} = \frac{-3\sqrt{3} - 3}{-6} = \underline{\frac{\sqrt{3} + 1}{2.}}$ 倍

タ〜ツ

3.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 合格 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

24
×8
192

(1) 3人とも合格.

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{192}$ ア～エ

(2). A不 B.C合

$\frac{5}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{192}$ オ～ク

Bのみ不

$\frac{1}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{192}$

Cのみ不

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{192}$

3人のうち 2人合

$\frac{5+7+3}{192}=\frac{15}{192}=\frac{5}{64}$ ケ～サ

3人とも不

$\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{35}{64}$

少なくとも 1人合

$1-\frac{35}{64}=\frac{29}{64}$ シ～ソ

(3). B,Cが合 のとき Aが合

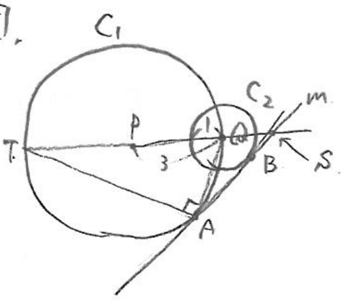
B.Cが合 $P(X)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

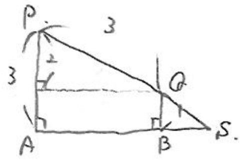
Aも合 $P(X\cap Y)=\frac{1}{192}$

$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}$

$=\frac{\frac{1}{192}}{\frac{1}{32}}=\frac{1}{6}$ タチ

4.




$AB=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ ア

$\triangle PAS:\triangle QBS=3:1$ より

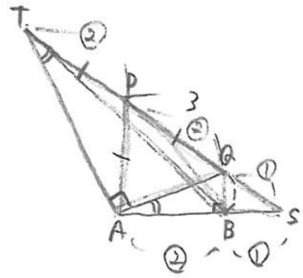
$PS:QS=3:1$ イウ

よって

$PQ:QS=2:1$

$3:QS=2:1$

$2QS=3$ $QS=\frac{3}{2}$ エオ




$AB:BS=2:1$ より

$\sqrt{5}:BS=2:1$

$2BS=\sqrt{5}$, $BS=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$AS=AB+BS=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ カ～ク

$\triangle AQT\sim\triangle BQA$ より

$AT:AQ=BA:BQ=\sqrt{5}:1$

$AQ=\sqrt{1+\sqrt{5}^2}=\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$.

$AT:\sqrt{6}=\sqrt{5}:1$

$AT=\sqrt{30}$ コサ

$\triangle APS$ の面積を 1 とすると

$\triangle APQ=\frac{2}{3}\times\triangle APS=\frac{2}{3}$

$\triangle BST=\frac{1}{3}\times\triangle APS\times\frac{5}{3}=\frac{5}{9}$

$\triangle APQ:\triangle BST=\frac{2}{3}:\frac{5}{9}=6:5$ シス

④.

(1) $A > B$.

$A - B = 56$.

$\begin{cases} A = aL \\ B = bL \end{cases}$ (L: 最大公約数) とすると、

最小公倍数 $abL = 960$. —①

$A-B=56$ より、$aL - bL = 56$

$L(a-b) = 56$. —②

$56 = \underline{2^3 \cdot 7}$ アイ

$960 = \underline{2^6 \cdot 3 \cdot 5}$ ウ〜オ

2) 56
2) 28
2) 14
7

2) 960
2) 480
2) 240
2) 120
2) 60
2) 30
3) 15
5

①より $abL = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$

②より $L(a-b) = 2^3 \cdot 7$.

よって、$L = 2^3 = \underline{8}$ カ (A,Bの最大公約数)

$abL = 2^3 \cdot ab = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$

$ab = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

$L(a-b) = 2^3(a-b) = 2^3 \cdot 7$

$a - b = 7$.

$b = a - 7$

$a(a-7) = 120$.

$a^2 - 7a - 120 = 0$

$(a-15)(a+8) = 0$

$a = 15, -8$

$a > 0$ より、$a = 15$.

$b = 15 - 7 = 8$.

よって、

$A = 15 \times 8 = \underline{120}$ キ〜ケ

$B = 8 \times 8 = \underline{64}$ コサ.

(2) $N = abab_{(3)} = bcc_{(5)}$

$abab_{(3)} = a \times 3^3 + b \times 3^2 + a \times 3 + b \times 3^0$

$= 27a + 9b + 3a + b$

$= 30a + 10b$ —①

$bcc_{(5)} = b \times 5^2 + c \times 5 + c \times 5^0$

$= 25b + 5c + c$

$= 25b + 6c$ —②

$abab_{(3)}$ は3進法なので

$0 \leqq a \leqq 2$、$0 \leqq b \leqq 2$

$bcc_{(5)}$ は5進法なので

$0 \leqq c \leqq 4$.

また、abab、bcc より

$a \neq 0$, $b \neq 0$

したがって それぞれの範囲は

$1 \leqq a \leqq 2$、$1 \leqq b \leqq 2$、$0 \leqq c \leqq 4$ となる。

①から $30a + 10b = 10(3a + b)$ となり

N は 一の位が 0 とわかる。

② $25b + 6c$ において

$b = 1$ のとき $25 + 6c$

$0 \leqq c \leqq 4$ において $25 + 6c$ の一の位が 0 になる c は存在しない。

$b = 2$ のとき $50 + 6c$

$0 \leqq c \leqq 4$ において、$50 + 6c$ の一の位が 0 になるのは、$c = 0$ のときである。

$(b, c) = (2, 0)$

$N = 25 \times 2 + 6 \times 0 = 50$

①より $30a + 10 \times 2 = 50$

$30a + 20 = 50$

$30a = 30$

$a = 1$

よって、

$a = \underline{1}$ シ、$b = \underline{2}$ ス、$c = \underline{0}$ セ

であり

自然数 $N = \underline{50}$ ソタ.