《第3節　2次方程式と2次不等式》

5　2次方程式

2次方程式の解き方

1　因数分解　性質「$AB=0 \iff A=0$ または $B=0$」が成り立つことを用いる。

2　解の公式

① 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，$b^2-4ac \geqq 0$ のとき解をもち，その解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

② 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ は，$b'^2-ac \geqq 0$ のとき解をもち，その解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

2次方程式の係数と実数解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，b^2-4ac を **判別式** といい，D で表す。D の符号から，2次方程式の実数解の個数を求めることができる。

$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0 \iff$ ただ1つの実数解（重解）をもつ

$D<0 \iff$ 実数解をもたない

注　上のことから「$D \geqq 0 \iff$ 2次方程式が実数解をもつ」が成り立つ。

TRIAL A

161　次の2次方程式を解け。　→教p.100 例11

(1) $(x+2)(x+5)=0$　(2) $x(x-9)=0$　(3) $(3x-1)(x+3)=0$

(4) $x^2-6x+5=0$　(5) $x^2+5x-14=0$　*(6) $x^2-4x=0$

(7) $3x^2+11x+6=0$　*(8) $2x^2-x-1=0$　(9) $4x^2-8x+3=0$

*(10) $4x^2+7x-2=0$　(11) $6x^2-5x-6=0$　*(12) $8x^2+2x-3=0$

162　次の2次方程式を解け。　→教p.101 例12

*(1) $x^2+5x+5=0$　(2) $x^2-7x+8=0$　*(3) $2x^2-5x-1=0$

(4) $3x^2+x-3=0$　(5) $2x^2-3x-2=0$　(6) $4x^2+20x+25=0$

163　次の2次方程式を解け。　→教p.102 例13

(1) $3x^2-4x-1=0$　*(2) $x^2+2x-4=0$　*(3) $3x^2+6x+2=0$

(4) $x^2-6x+1=0$　*(5) $5x^2+2x-3=0$　(6) $25x^2-30x+9=0$

164 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。 →教p.103 例 14

*(1) $x^2+4x+1=0$　(2) $x^2+2x-1=0$　*(3) $6x^2-7x+3=0$

(4) $9x^2+12x+4=0$　(5) $3x^2-2\sqrt{2}x+2=0$　*(6) $\frac{3}{4}x^2-\sqrt{3}x+1=0$

例題 28 2 次方程式 $2x^2-3x+5m-2=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。 →教p.104 例題 8

考え方　判別式を D とすると，2 次方程式が実数解をもつための条件は $D>0$ または $D=0$，すなわち $D\geqq 0$ である。($p.46$ 要項の注を参照)

解答 この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(5m-2)=25-40m$$

2 次方程式が実数解をもつのは $D\geqq 0$ のときであるから　$25-40m\geqq 0$

これを解いて　$m\leqq\frac{5}{8}$　答

***165** 次の 2 次方程式がそれぞれ [　　] 内の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。 →教p.104 例題 8

(1) $x^2+4x+m=0$　[異なる 2 つの実数解をもつ]

(2) $3x^2+x+m=0$　[実数解をもたない]

(3) $2x^2+x-m+1=0$　[実数解をもつ]

***166** 次の 2 次方程式が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。 →教p.104 例題 9

(1) $x^2+2x+m-3=0$　(2) $x^2+mx+m+3=0$

TRIAL B

167 次の 2 次方程式を解け。

(1) $2x^2-3x=x^2-2$　(2) $-2x^2-2x+3=0$

*(3) $(x+4)(x+5)=3(x+1)(x+2)-4$　(4) $0.2x^2-0.1x-1=0$

*(5) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=0$　*(6) $x^2+2\sqrt{2}x-3=0$

(7) $(x+\sqrt{2})^2+2(x+\sqrt{2})-3=0$　(8) $(x-1)^2-\sqrt{5}(x-1)-1=0$

168 2 次方程式 $2x^2+3x+m=0$ の実数解の個数を，m の値によって場合分けして求めよ。

▶ヒント　167 (7), (8) おき換えを利用する。

例題 29 2次方程式 $x^2-mx-2m^2=0$ の解の1つが $x=2$ であるとき，定数 m の値と他の解を求めよ。

考え方 「$x=2$ が解である」とは，方程式に $x=2$ を代入すると成り立つということである。すなわち $2^2-m\cdot 2-2m^2=0$ が成り立つ。

解答 この2次方程式の解の1つが $x=2$ であるとき

$2^2-m\cdot 2-2m^2=0$ ⇐ $x=2$ を方程式に代入。

整理すると　$m^2+m-2=0$

これを解いて　$m=-2,\ 1$

[1] $m=-2$ のとき　方程式は　$x^2+2x-8=0$

これを解いて　$x=-4,\ 2$

よって，他の解は　$x=-4$

[2] $m=1$ のとき　方程式は　$x^2-x-2=0$

これを解いて　$x=-1,\ 2$

よって，他の解は　$x=-1$

[1]，[2] から，**$m=-2$ のとき他の解は $x=-4$，**

$m=1$ のとき他の解は $x=-1$　答

*169 次の2次方程式がそれぞれ [　　] 内の条件を満たすとき，定数 m の値と他の解を求めよ。

(1) $3x^2-2mx-m^2=0$　[解の1つが $x=1$]

(2) $x^2-5mx+6m^2=0$　[解の1つが $x=6$]

例題 30 2つの2次方程式 $x^2+x+m=0$，$x^2+3x+2m=0$ が共通な解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，その共通な解を求めよ。

考え方 共通な解を α として，α と m の連立方程式を解く。

解答 共通な解を α とすると

$\alpha^2+\alpha+m=0$ …… ①，$\alpha^2+3\alpha+2m=0$ …… ②

① より　$m=-\alpha^2-\alpha$ …… ③

これを ② に代入して　$\alpha^2+3\alpha+2(-\alpha^2-\alpha)=0$　すなわち　$\alpha^2-\alpha=0$

これを解くと　$\alpha=0,\ 1$

よって，③ より　$\alpha=0$ のとき　$m=0$，$\alpha=1$ のとき　$m=-2$

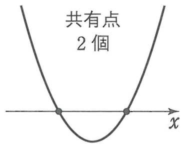
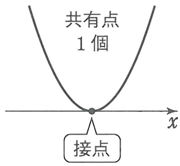
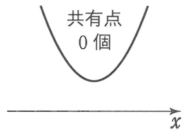
したがって　**$m=0$ のとき　共通な解は 0，**

$m=-2$ のとき　共通な解は 1　答

170 2つの2次方程式 $x^2+2x+m=0$，$x^2+3x+2m=0$ が共通な解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，その共通な解を求めよ。

6 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
x 軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
$a>0$ のときグラフと x 軸との共有点の個数			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	実数解はない

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について

グラフと x 軸の共有点の x 座標 ＝ 方程式の実数解

グラフと x 軸の共有点の個数 ＝ 方程式の実数解の個数

TRIAL A

171 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。また，グラフが x 軸に接するものはどれか。 →教p.105 例15，p.106 例16

(1) $y=x^2-5x+4$　*(2) $y=2x^2+x-6$　*(3) $y=x^2+3x-2$

(4) $y=-x^2+6x-9$　(5) $y=-3x^2+x+1$　*(6) $y=3x^2+6x+3$

172 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。 →教p.108 例18

(1) $y=x^2-3x+1$　*(2) $y=2x^2+x+2$　*(3) $y=-4x^2+4x-1$

(4) $y=-x^2+3x-3$　(5) $y=x^2+3x+\dfrac{9}{4}$　*(6) $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2x+6$

***173** 2次関数 $y=x^2-2x+m-1$ のグラフについて，次の問いに答えよ。

→教p.108 例題10

(1) x 軸と異なる2点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) x 軸と共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(3) x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

▶ヒント　173　(3) 2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつための条件は $D\geqq0$

TRIAL B

***174**　次の2次関数のグラフが x 軸に接するとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+x+m$　　　　(2)　$y=x^2-2mx+m$

***175**　放物線 $y=x^2+6x+7$ は x 軸と2点で交わる。その交点をA，Bとする。この放物線が x 軸から切り取る線分ABの長さを求めよ。

→数p.120 補充問題7

176　2次関数のグラフが x 軸と2点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わり，点 $(0,\ 4)$ を通るとき，その2次関数を求めよ。

例題 31　2次関数 $y=x^2-4x+3m-2$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

考え方　求める共有点の個数は，$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot(3m-2)$ の符号で決まる。m の値によって，場合分けして考える。

解答　2次方程式 $x^2-4x+3m-2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot(3m-2)=-12m+24=-12(m-2)$$

[1] $D>0$　すなわち　$m<2$ のとき　　共有点の個数は　2個

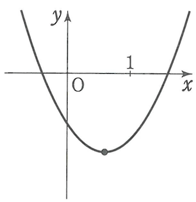
[2] $D=0$　すなわち　$m=2$ のとき　　共有点の個数は　1個

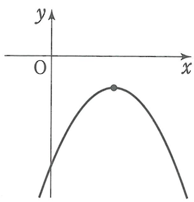
[3] $D<0$　すなわち　$m>2$ のとき　　共有点の個数は　0個

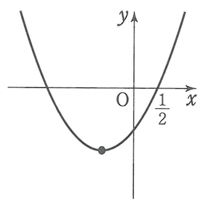
以上から　**$m<2$ のとき2個，$m=2$ のとき1個，$m>2$ のとき0個**　答

***177**　2次関数 $y=x^2+5x-m+4$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

◆*178　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが次の図のようになるとき，a，b，c，b^2-4ac，$a+b+c$ の符号を求めよ。

(1)


(2)


(3)


▶ヒント　**175**　放物線と x 軸の交点の x 座標が α，β で $\alpha<\beta$ のとき，切り取る線分の長さは $\beta-\alpha$

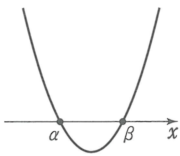
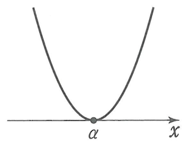
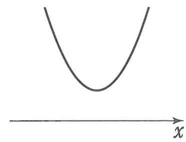
176　x 軸と2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる放物線をグラフにもつ2次関数は $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形に表される。

178　頂点の x 座標，y 軸との交点の y 座標，x 軸との共有点の有無などに着目する。

7 2次不等式

■ 2次不等式の解

1 $a>0$ とする。

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\alpha,\ \beta$	$x=\alpha$	実数解はない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解	$x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	解はない	解はない
$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解	$\alpha\leqq x\leqq\beta$	$x=\alpha$	解はない

$a<0$ のときは，不等式の両辺に -1 を掛けて，x^2 の係数を正にして考える。

2 $\alpha<\beta$ とする。 $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \iff \alpha<x<\beta$

$(x-\alpha)(x-\beta)>0 \iff x<\alpha,\ \beta<x$

TRIAL A

179 1次関数のグラフを利用して，次の1次不等式の解を求めよ。

→教p.110 例19

(1) $3x-9<0$　(2) $2x+3\geqq 0$　(3) $-4x+1>0$

180 次の2次不等式を解け。 →教p.112 例21

*(1) $(x-2)(x-5)>0$　(2) $(x+5)(x+3)\leqq 0$

*(3) $(x+6)(x-6)<0$　(4) $(x-3)x\geqq 0$

*(5) $x^2-x-2<0$　(6) $x^2-7x+12\geqq 0$

*(7) $x^2+2x\leqq 0$　(8) $x^2>16$

181 次の2次不等式を解け。 →教p.113 例題11

(1) $2x^2-7x-4\leqq 0$　*(2) $6x^2+x-2>0$

*(3) $x^2+5x+1<0$　(4) $2x^2-2x-1\geqq 0$

(5) $x^2-7<0$　(6) $2x^2-9\geqq 0$

182 次の 2 次不等式を解け。 →教p.113 例題 12

(1) $-x^2+7x-10>0$　　(2) $-x^2+5x\leqq 0$

(3) $-3x^2-x+3\geqq 0$　　(4) $-2x^2-7x-5<0$

183 次の 2 次不等式を解け。 →教p.114 例 22

(1) $(x+3)^2\geqq 0$　　*(2) $(x-1)^2\leqq 0$

(3) $x^2+4x+4<0$　　*(4) $x^2-12x+36>0$

*(5) $9x^2-24x+16\leqq 0$　　*(6) $x^2-3x+\dfrac{9}{4}\geqq 0$

184 次の 2 次不等式を解け。 →教p.115 例 23

*(1) $x^2-2x+3<0$　　(2) $x^2-3x+4>0$

(3) $2x^2+4x+5\leqq 0$　　*(4) $3x^2-12x+14\geqq 0$

185 次の 2 次不等式を解け。 →教p.116 例題 13

(1) $x^2+x+2<0$　　(2) $-x^2+10x-25\geqq 0$

(3) $2x^2+3\sqrt{2}\,x+3>0$　　(4) $4x-7\leqq 2x^2$

(5) $2x^2+7x<-3$　　(6) $3x^2-4x>2x^2-5x+1$

186 次の連立不等式を解け。 →教p.118 例題 14

(1) $\begin{cases} x^2+6x+8>0 \\ x^2+2x-3<0 \end{cases}$　　*(2) $\begin{cases} x^2-x-12\leqq 0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$　　*(3) $\begin{cases} x^2+2x-2\geqq 0 \\ x^2+2x-8<0 \end{cases}$

TRIAL B

***187** 次の 2 次不等式を解け。

(1) $6(x+1)^2>5x+4$　　(2) $x^2<\sqrt{5}\,(2x-\sqrt{5}\,)$

(3) $\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2>\dfrac{2x-5}{4}$　　(4) $\dfrac{(x-1)^2}{3}\geqq\dfrac{(x-2)^2}{2}-1$

188 次の 2 次不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。 →教p.120 補充問題 9

(1) $2x^2+3x-9\leqq 0$　　*(2) $x^2-2x-4<0$

189 次の不等式を解け。

(1) $3<x^2+2x\leqq 8$　　*(2) $2x+3\leqq x^2<5$

▶ヒント　188　与えられた 2 次不等式を解き，解の範囲に含まれている整数を求める。

*190 2次方程式 $3x^2-2mx+1=0$ について，次の問いに答えよ。

→教p.117 応用例題4

(1) 実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) 実数解をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

*191 2次関数 $y=x^2-mx+m+3$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，定数 m の値によってどのように変わるか。

→教p.120 補充問題8

*192 2次不等式 $x^2-2mx+m+6>0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

→教p.118 応用例題5

193 次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 2次関数 $y=x^2+mx+2$ において，y の値が常に正である。

*(2) 2次関数 $y=mx^2+4x+m-3$ において，y の値が常に負である。

(3) 2次関数 $y=-x^2+2x-m(2-m)$ において，$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で y の値が常に正である。

*194 周の長さが32 cm で，縦の長さが横の長さ以上の長方形を考える。この長方形の面積を48 cm^2 より大きくするには，縦の長さをどのような範囲にとればよいか。

→教p.119 応用例題6

195 放物線 $y=x^2-4mx+5m^2+3m-10$ の頂点の座標を $(p,\ q)$ とする。$p<0$ かつ $q<0$ であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

196 次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 2つの2次関数 $y=x^2+2mx+m+2$，$y=x^2+mx+m$ のグラフが，ともに x 軸と共有点をもつ。

(2) 2つの2次方程式 $x^2+mx-2m=0$，$x^2-2mx+m+6=0$ が，ともに実数解をもたない。

▶ヒント 191 2次方程式 $x^2-mx+m+3=0$ の判別式の符号を調べる。m の値によって場合分けして考える。(p.50の例題31参照)

193 2次関数のグラフと x 軸との位置関係で考える。

195 頂点の座標 $(p,\ q)$ を m の式で表す。

練習問題

発展 放物線と直線の共有点の座標

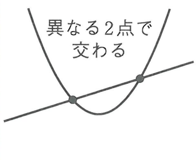
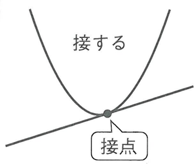
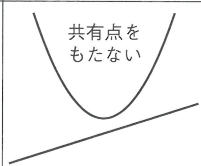
例題 32　次の放物線と直線に共有点があれば，その座標を求めよ。

→教p.109 発展

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$　　(2)　$y=x^2-2x+1$，$y=2x-3$

(3)　$y=-x^2$，$y=x+1$

考え方　放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が共有点をもつとき，その点の x 座標は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の実数解である。
この 2 次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ すなわち $ax^2+(b-m)x+c-n=0$ の判別式を D とすると，次のことがいえる。

D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
放物線と直線の位置関係	 共有点は 2 個	 共有点は 1 個	 共有点は 0 個

解答　(1)　y を消去すると　$x^2=x+2$　すなわち　$x^2-x-2=0$
これを解いて　$x=-1,\ 2$
$y=x+2$ に代入すると　$x=-1$ のとき $y=1$，$x=2$ のとき $y=4$
よって，共有点の座標は　$(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$　答

(2)　y を消去すると　$x^2-2x+1=2x-3$　すなわち　$x^2-4x+4=0$
これを解いて　$x=2$
$y=2x-3$ に代入すると　$x=2$ のとき $y=1$
よって，共有点の座標は　$(2,\ 1)$　答

(3)　y を消去すると　$-x^2=x+1$　すなわち　$x^2+x+1=0$
この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

したがって，共有点はない。　答

197　次の放物線と直線に共有点があれば，その座標を求めよ。　→教p.109 発展

(1)　$y=x^2$，$y=-x+6$　　(2)　$y=-x^2+x+8$，$y=3x+9$

(3)　$y=x^2+2$，$y=2x-6$

198　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-2x+m$ が接するとき，定数 m の値を求めよ。また，その接点の座標を求めよ。

199 2つの2次方程式 $x^2+2ax+a+2=0$, $x^2-4x+a+3=0$ の少なくとも一方が実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

放物線と x 軸の共有点の位置

例題 33 2次関数 $y=x^2-2mx-m+2$ のグラフが x 軸の正の部分と，異なる2点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

考え方 2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と，異なる2点で交わるのは，

① $D=b^2-4ac>0$

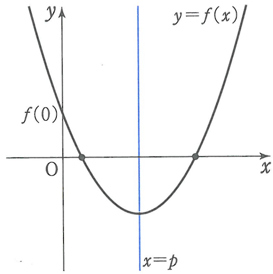
② 軸 $x=p$ について　$p>0$

③ グラフと y 軸の交点の y 座標 $f(0)$ について

　$a>0$ のとき　$f(0)>0$

　$a<0$ のとき　$f(0)<0$

の3つが同時に成り立つときである。



解答 $f(x)=x^2-2mx-m+2$ とし，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする。
$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と，異なる2点で交わるのは

$D=(-2m)^2-4\cdot1\cdot(-m+2)>0$ …… ①

軸について　$-\dfrac{-2m}{2\cdot1}>0$　すなわち　$m>0$ …… ②

$f(0)=-m+2>0$ …… ③

の3つが同時に成り立つときである。

①から　$4(m^2+m-2)>0$

これを解いて　$m<-2,\ 1<m$ …… ④

③から　$m<2$ …… ⑤

②，④，⑤の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1<m<2}$　**答**

200 2次関数 $y=x^2+2mx+2m+3$ のグラフが次の部分と，異なる2点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) x 軸の正の部分　　(2) x 軸の負の部分

201　2次不等式 $-2x^2+ax+b<0$ の解が $x<-3$，$2<x$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

絶対値を含む関数のグラフ

例題 34　関数 $y=|x+1|+|x-3|$ のグラフをかけ。　→教p.182，183 課題学習2

考え方　絶対値記号の中の式の符号によって場合分けして考える。

解答　[1]　$x<-1$ のとき　$y=-(x+1)-(x-3)$

すなわち　$y=-2x+2$

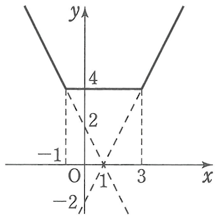
[2]　$-1\leqq x<3$ のとき　$y=(x+1)-(x-3)$

すなわち　$y=4$

[3]　$3\leqq x$ のとき　$y=(x+1)+(x-3)$

すなわち　$y=2x-2$

よって，グラフは［図］の実線部分である。　答



202　次の関数のグラフをかけ。　→教p.182，183 課題学習2

(1)　$y=|x+1|$　　(2)　$y=|2x-3|$

(3)　$y=|x|+|x-1|$　　(4)　$y=|x+1|-|x-2|$

203　次の関数のグラフをかけ。　→教p.182，183 課題学習2

(1)　$y=|x^2-4x|$　　(2)　$y=|x^2+3x-4|$

(3)　$y=x^2-2|x|$　　(4)　$y=x|x+3|$

204　グラフを利用して，次の不等式を解け。　→教p.182，183 課題学習2

(1)　$|x+4|<3x$　　(2)　$|x^2-4|>-3x$

▶ヒント　**201**　2次方程式 $-2x^2+ax+b=0$ は，$x=-3$，2 を解にもつ。得られた2次不等式の解が正しいかどうか確認する。

204　(1) $y=|x+4|$ のグラフが直線 $y=3x$ より下側にある x の値の範囲を求める。

(2) $y=|x^2-4|$ のグラフが直線 $y=-3x$ より上側にある x の値の範囲を求める。