第２節　２次関数の値の変化

3　２次関数の最大・最小

２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

$a>0$ のとき，$x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない。

$a<0$ のとき，$x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

２次関数の定義域と最大・最小

グラフをかいて，頂点の位置，定義域の両端における y の値に注目する。

最大・最小の応用（文章題）

① 何を変数 (x) にするかを決め，そのとりうる値の範囲（定義域）を定める。

② 最大・最小を求めようとする量 (y) を，変数 (x) を用いて表す。

③ 変数 (x) の定義域に注意して，② で表した関数（x の式 y）の最大・最小を求める。

注　$y \geqq 0$ のとき，y の最大・最小を求めるのに，まず y^2 の最大・最小を求めると簡単な場合もある。このとき，次のことを利用する。

$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ のとき　　$A<B \iff A^2<B^2$

TRIAL A

138　次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。　→教p.90 例題4

(1) $y=(x-1)^2+5$　(2) $y=-3x^2+2$　*(3) $y=x^2-4x-4$

*(4) $y=-2x^2-4x-3$　(5) $y=x^2+5x+4$　*(6) $y=-2x^2+3x-1$

139　次の関数の値域と最大値，最小値を求めよ。　→教p.91 例8，9

*(1) $y=x^2$ $(-3 \leqq x \leqq 1)$　(2) $y=-x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$

(3) $y=3x^2$ $(2 \leqq x \leqq 3)$　*(4) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ $(-4 \leqq x \leqq -2)$

140　関数 $y=-x^2-2x+1$ の定義域として次の範囲をとるとき，各場合について，最大値と最小値を求めよ。　→教p.92 例題5

(1) $0 \leqq x \leqq 2$　(2) $-2 \leqq x \leqq 1$　(3) $-4 \leqq x \leqq -3$　(4) $-2 \leqq x \leqq 0$

141　次の関数の最大値，最小値を求めよ。　→教p.92 例題5

(1) $y=x^2-2x-3$ $(-2 \leqq x \leqq 5)$

*(2) $y=-2x^2-4x+1$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$

*(3) $y=2x^2+6x+3$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$

(4) $y=-3x^2+3x+1$ $(1 \leqq x \leqq 2)$

TRIAL B

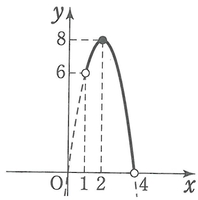
例題 21　関数 $y=-2x^2+8x$ $(1<x<4)$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

解答　$y=-2x^2+8x$ を変形すると　$y=-2(x-2)^2+8$

$1<x<4$ でのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，y は $x=2$ で最大値 8 をとる。

最小値はない。　答



注　y は 0 にいくらでも近い値をとるが，定義域のどんな x に対しても $y=0$ とはならないので，最小値は存在しない。

142　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

*(1)　$y=x^2-4x+5$　$(1<x<3)$　　(2)　$y=-x^2-x+2$　$(0\leqq x<1)$

*(3)　$y=3x^2-4x+1$　$(0<x\leqq 2)$　　(4)　$y=-2x^2+6x-1$　$(x\geqq\sqrt{2})$

例題 22　x の 2 次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。→教p.99 補充問題 4

(1)　この関数の最小値 k を m の式で表せ。

(2)　この関数の最小値 k が -4 であるとき，m の値を求めよ。

(3)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

考え方　x の 2 次式とみて平方完成する。

解答

(1)　$y=x^2+2mx+3m$ を変形すると　$y=(x+m)^2-m^2+3m$

よって，y は $x=-m$ で最小値 $-m^2+3m$ をとる。

したがって　$\boldsymbol{k=-m^2+3m}$　答

(2)　$-m^2+3m=-4$ から　$m^2-3m-4=0$

左辺を因数分解すると　$(m+1)(m-4)=0$

よって　$m+1=0$　または　$m-4=0$

したがって　$\boldsymbol{m=-1,\ 4}$　答

(3)　$k=-m^2+3m$ を変形すると　$k=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，k は $m=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。　答

***143**　x の 2 次関数 $y=-x^2+2mx-5m$ の最大値を k とする。→教p.99 補充問題 4

(1)　この関数の最大値 k を m の式で表せ。

(2)　この関数の最大値 k が 14 であるとき，m の値を求めよ。

(3)　k の値を最小にする m の値と，k の最小値を求めよ。

*144　次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ。　→教p.93 応用例題2

(1)　関数 $y=2x^2+4x+c$　$(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 7 である。

(2)　関数 $y=-x^2+2x+c$　$(0\leqq x\leqq 3)$ の最小値が -5 である。

145　a は正の定数とする。関数 $y=ax^2-4ax+b$　$(0\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 15 で，最小値が -3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

例題 23　a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ。　→教p.99 補充問題5

(1)　$a<0$　　(2)　$0\leqq a\leqq 2$　　(3)　$2<a$

考え方　放物線の軸と定義域の位置関係に注意して，最大値，最小値をとる x の値を調べる。

解答　$y=x^2-2ax+1$ を変形すると　$y=(x-a)^2-a^2+1$　⇐平方完成して，放物線の軸を求める。

よって，放物線の軸は　直線 $x=a$

(1)　$a<0$ のとき，グラフは下の図(1)の実線部分である。

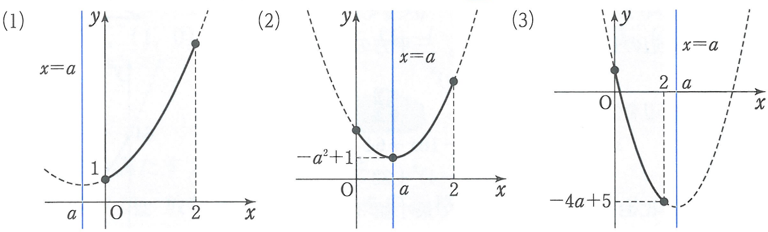
よって，$\boldsymbol{x=0}$ で最小値 $\boldsymbol{1}$ をとる。　答

(2)　$0\leqq a\leqq 2$ のとき，グラフは下の図(2)の実線部分である。

よって，$\boldsymbol{x=a}$ で最小値 $\boldsymbol{-a^2+1}$ をとる。　答

(3)　$2<a$ のとき，グラフは下の図(3)の実線部分である。

よって，$\boldsymbol{x=2}$ で最小値 $\boldsymbol{-4a+5}$ をとる。　答



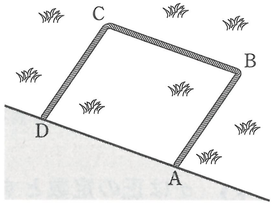
146　a は定数とする。関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ の最大値を，次の場合について，それぞれ求めよ。　→教p.99 補充問題5

(1)　$a<-1$　　(2)　$-1\leqq a\leqq 0$　　(3)　$0<a$

147　a は正の定数とする。関数 $y=-x^2+4x+1$ $(0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。　→教p.95 研究

(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。

148　まっすぐな道路に面した土地と長さ 12 m のロープがある。道路とロープで囲んだ土地が，右の図のような長方形 ABCD であるとする。この長方形 ABCD の面積を最大にするには，AB の長さを何 m にすればよいか。ただし，ロープの幅は無視してよい。



→教p.94 応用例題 3

◆*149　ある品物の売価が 1 個 100 円のときは，1 日 300 個の売り上げがある。売価を 1 個につき 1 円値上げすると，1 日 2 個の割合で売り上げが減る。1 日の売り上げ金額を最大にするには，売価をいくらにするとよいか。ただし，消費税は考えないものとする。

→教p.94 応用例題 3

例題 24　直角をはさむ 2 辺の長さの和が 8 である直角三角形がある。このような三角形の斜辺の長さの最小値を求めよ。

考え方　斜辺の長さを y とすると，$y>0$ であるから，y^2 が最小となるとき y も最小となる。($p.39$ 要項の注を参照)

解答　直角をはさむ 2 辺の一方の長さを x とすると，他方は $8-x$ である。

$x>0$ かつ $8-x>0$ から　　$0<x<8$　…… ①

斜辺の長さを y とすると，三平方の定理により

$$y^2=x^2+(8-x)^2$$

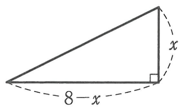
右辺を変形すると

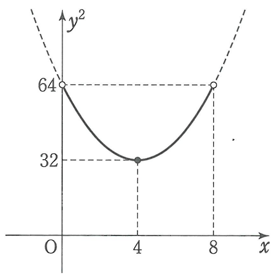
$$x^2+(8-x)^2=2x^2-16x+64$$
$$=2(x-4)^2+32$$

① において，y^2 は $x=4$ で最小値 32 をとる。

$y>0$ であるから，y^2 が最小となるとき y も最小となる。

よって，求める最小値は　　$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$　答





***150**　直角をはさむ 2 辺の長さの和が 12 である直角三角形がある。このような三角形の斜辺の長さの最小値を求めよ。

▶ヒント　149　売価を x 円値上げすると，売り上げ個数は $2x$ 個減る。1 日の売り上げ金額 y 円を x の 2 次関数とみて，値の変化を調べる。

4 2次関数の決定

2次関数の決定

与えられた条件によって，求める2次関数を適した形で表して，未定の係数を定める。

1 頂点や軸に関する条件が与えられた場合 ⟶ $y=a(x-p)^2+q$

2 グラフが通る3点が与えられた場合 ⟶ $y=ax^2+bx+c$

TRIAL A

*151 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。→教p.96 例題6

(1) 頂点が点 $(1,\ -2)$ で，点 $(2,\ -3)$ を通る。

(2) 頂点が点 $(-4,\ -1)$ で，点 $(-6,\ 7)$ を通る。

(3) 軸が直線 $x=2$ で，2点 $(4,\ 1)$，$(6,\ -5)$ を通る。

(4) 軸が直線 $x=-3$ で，2点 $(0,\ 9)$，$(-2,\ -7)$ を通る。

152 次の連立3元1次方程式を解け。→教p.97 例10

(1) $\begin{cases} 4a-2b+c=9 \\ a-b+c=2 \\ a+b+c=6 \end{cases}$ *(2) $\begin{cases} a+b+2c=9 \\ a+2b+c=11 \\ 2a+b+c=8 \end{cases}$ *(3) $\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+6y+2z=-3 \end{cases}$

*153 2次関数のグラフが次の3点を通るとき，その2次関数を求めよ。

→教p.98 例題7

(1) $(0,\ 3)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ (2) $(-1,\ 1)$，$(1,\ -5)$，$(3,\ 5)$

TRIAL B

*154 次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) グラフが，放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動したもので，2点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$ を通る。

(2) グラフの頂点は放物線 $y=-2x^2+8x-5$ の頂点と同じであり，y 軸と点 $(0,\ 7)$ で交わる。

(3) $x=3$ で最小値4をとり，$x=5$ で $y=8$ となる。

155 次の2つの放物線の頂点が一致するとき，定数 a，b の値を求めよ。

$$y=2x^2-8x+2,\quad y=x^2+2ax+b$$

▶ヒント 154 (1) 平行移動では x^2 の係数は変わらない。

例題 25 放物線 $y=x^2+2mx+9$ の頂点が直線 $y=-2x+1$ 上にあるとき，定数 m の値を求めよ。

考え方 放物線の頂点の座標が $(p,\ q)$ であるとき，$q=-2p+1$ が成り立つ。

解答
$y=x^2+2mx+9$ を変形すると　$y=(x+m)^2-m^2+9$
よって，放物線の頂点は　点 $(-m,\ -m^2+9)$
この点が直線 $y=-2x+1$ 上にあるから
　$-m^2+9=-2\cdot(-m)+1$　すなわち　$m^2+2m-8=0$
左辺を因数分解すると　$(m+4)(m-2)=0$
よって　$m+4=0$　または　$m-2=0$
したがって　$\boldsymbol{m=-4,\ 2}$　答

156 放物線 $y=2x^2+4mx+4$ の頂点が直線 $y=-x+3$ 上にあるとき，定数 m の値を求めよ。

157 放物線 $y=2x^2-2bx+c$ が点 $(-1,\ 2)$ を通るとき，次の問いに答えよ。
(1) c を b の式で表せ。
(2) この放物線の頂点が直線 $y=-x-2$ 上にあるとき，定数 b，c の値を求めよ。

練習問題

条件つきの最大・最小

例題 26 実数 x，y が $2x-y=5$ を満たしながら変化するとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

考え方 条件の式 $2x-y=5$ を用いて y を消去し，$z=x^2+y^2$ を1つの変数 x で表す。

解答 $z=x^2+y^2$ とする。
$2x-y=5$ より $y=2x-5$ であるから
　$z=x^2+y^2=x^2+(2x-5)^2=5x^2-20x+25=5(x-2)^2+5$
よって，z は $x=2$ で最小値 5 をとる。
このとき　$y=2\cdot2-5=-1$
したがって　$\boldsymbol{x=2,\ y=-1}$ **のとき　最小値 5**　答

158 x，y は実数とする。次の問いに答えよ。
(1) $2x+y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。
(2) $x+2y+3=0$ のとき，xy の最大値とそのときの x，y の値を求めよ。

159　a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax+3$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を，次の場合について，それぞれ求めよ。

(1)　$a<0$　　(2)　$a=0$　　(3)　$a>0$

定義域が動く場合の最大・最小

例題 27　a は定数とする。関数 $y=x^2-2x$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ。

(1)　$a<0$　　(2)　$0 \leqq a \leqq 1$　　(3)　$1<a$

考え方　放物線の軸と定義域の位置関係に注意して，最小値をとる x の値を調べる。

解答　$y=x^2-2x$ を変形すると　$y=(x-1)^2-1$

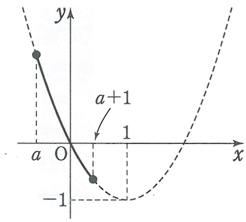
よって，放物線の軸は　直線 $x=1$，　頂点は　点 $(1,\ -1)$

(1)　$a<0$ のとき，$a+1<1$ であるから，グラフは右の図の実線部分である。

$x=a+1$ のとき

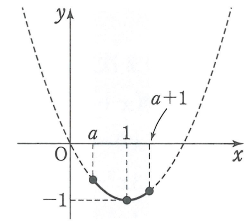
$y=\{(a+1)-1\}^2-1=a^2-1$

よって，$\boldsymbol{x=a+1}$ で最小値 $\boldsymbol{a^2-1}$ をとる。　答



(2)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき，$a \leqq 1 \leqq a+1$ であるから，グラフは右の図の実線部分である。

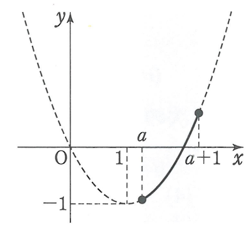
よって，$\boldsymbol{x=1}$ で最小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる。　答



(3)　$1<a$ のとき，グラフは右の図の実線部分である。

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a$

よって，$\boldsymbol{x=a}$ で最小値 $\boldsymbol{a^2-2a}$ をとる。　答



160　a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+3$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ の最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ。

(1)　$a<-1$　　(2)　$-1 \leqq a \leqq 1$　　(3)　$1<a$

第3章　2次関数