《第１節　2次関数とグラフ》

1　関数とグラフ

関　数

1　2 つの変数 x，y について，x の値が 1 つ決まると，それに対応して y の値がただ 1 つ決まるとき，y は x の **関数** であるという。その変数 x のとりうる値の範囲をその関数の **定義域**，定義域の x の値に対応して y がとる値の範囲を，その関数の **値域** という。

2　y が x の 1 次式で表されるとき，y は x の **1 次関数** であるといい，y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の **2 次関数** であるという。

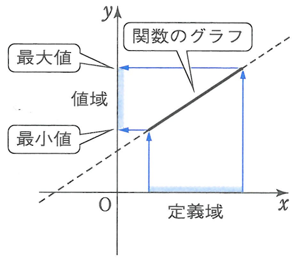
a，b，c は定数とするとき　1 次関数は　$y=ax+b$　　ただし，$a\neq 0$

　　　　　　　　　　　　　　2 次関数は　$y=ax^2+bx+c$　ただし，$a\neq 0$

3　y が x の関数であるとき，y を表す x の式を $\boldsymbol{f(x)}$，$\boldsymbol{g(x)}$ などと書く。
関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して決まる y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ と書き，$f(a)$ を関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における **値** という。

関数のグラフ

座標平面上において，関係 $y=f(x)$ を満たすような点 $(x,\ f(x))$ 全体で作られる図形を，関数 $y=f(x)$ の **グラフ** という。



関数の最大値・最小値

関数の値域に最大の値があるとき，その値を関数の **最大値** という。また，最小の値があるとき，その値を関数の **最小値** という。

TRIAL A

114　次の各場合について，y は x の関数である。y を x の式で表せ。また，定義域も示せ。　→教p.70 例 1

(1)　100 L の水が入った水そうがあり，水そうの水がなくなるまで毎分 4 L の割合で水を出していく。このとき，水を出し始めてから x 分後の水そうの水の量を y L とする。

*(2)　周囲の長さが 28 cm である長方形において，縦の長さを x cm，面積を y cm^2 とする。

115　2 次関数 $f(x)=2x^2-3x+4$ において，次の値を求めよ。　→教p.71 例 2

*(1)　$f(2)$　　(2)　$f(0)$　　(3)　$f(-1)$

*(4)　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$　　*(5)　$f(-\sqrt{2})$　　(6)　$f(1-\sqrt{3})$

(7)　$f(-a)$　　*(8)　$f(a+2)$　　(9)　$f(a^2)$

*116　1次関数 $f(x)=ax+b$ が次の条件を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ。

→教p.72 例題1

(1)　$f(1)=-2$，$f(3)=4$　(2)　$f(2)=2$，$f(-4)=14$

(3)　$f(-3)=-\frac{1}{4}$，$f(-1)=\frac{5}{4}$　(4)　$f(-2)=-\frac{5}{2}$，$f(-3)=-2$

117　次の関数のグラフをかけ。また，関数の値域と最大値，最小値を求めよ。

→教p.73 例題2

(1)　$y=x+2$　$(-2\leqq x\leqq 1)$　(2)　$y=-3x+4$　$(0\leqq x\leqq 2)$

*(3)　$y=\frac{1}{2}x+4$　$(-2\leqq x\leqq 2)$　*(4)　$y=-\frac{1}{2}x+1$　$(0\leqq x\leqq 4)$

TRIAL B

118　次の点はどの象限にあるか。

→教p.74 研究

(1)　点 $(-3,\ 1)$　(2)　点 $(4,\ 3)$

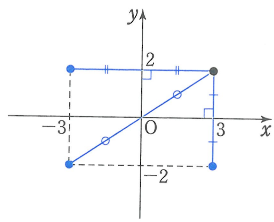
(3)　点 $(1,\ -2)$　(4)　点 $(-2,\ -4)$

例題 17　点 $(3,\ 2)$ に対して，x 軸，y 軸，原点に関して対称な点の座標を，それぞれ求めよ。

→教p.74 研究

解答　右の図から，x 軸，y 軸，原点に関して対称な点の座標は順に

$(3,\ -2)$，$(-3,\ 2)$，$(-3,\ -2)$　答



119　次の点に対して，x 軸，y 軸，原点に関して対称な点の座標を，それぞれ求めよ。

→教p.74 研究

(1)　$(3,\ 5)$　(2)　$(-2,\ 3)$　(3)　$(4,\ -3)$

120　点 $(5,\ -1)$ に対して，次の点は x 軸，y 軸，原点のうちどれに関して対称な点であるか。

→教p.74 研究

(1)　$(-5,\ -1)$　(2)　$(-5,\ 1)$　(3)　$(5,\ 1)$

2 2次関数のグラフ

2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

1　軸は y 軸，頂点は原点の放物線である。

2　$a>0$ のとき　下に凸，　$a<0$ のとき　上に凸

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線で，頂点は点 $(p,\ q)$，軸は直線 $x=p$ である。

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形（平方完成）すると，$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ であるから

頂点は　点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$，　軸は　直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$

グラフの平行移動，対称移動

平行移動　関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後のグラフの方程式は，$y=f(x-p)+q$ になる。

対称移動　関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸，y 軸，原点それぞれに関して対称移動すると，移動後のグラフの方程式は，それぞれ次のようになる。

x 軸：$y=-f(x)$　　y 軸：$y=f(-x)$　　原点：$y=-f(-x)$

TRIAL A

121　次の2次関数のグラフをかけ。また，その放物線は上に凸，下に凸のどちらであるか。 →教p.76 練習5

*(1)　$y=4x^2$　　(2)　$y=\dfrac{3}{2}x^2$　　*(3)　$y=-4x^2$

122　次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。 →教p.77 練習7

*(1)　$y=x^2+2$　　*(2)　$y=-2x^2+3$　　(3)　$y=\dfrac{1}{3}x^2-1$

123　次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。 →教p.79 練習8

(1)　$y=(x-1)^2$　　*(2)　$y=(x+3)^2$　　*(3)　$y=-3(x-2)^2$

124　次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。 →教p.80 例3

(1)　$y=(x-2)^2+1$　　*(2)　$y=-2(x+2)^2+4$　　(3)　$y=-(x-1)^2-3$

(4)　$y=3(x+1)^2-2$　　*(5)　$y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2-\dfrac{3}{2}$　　*(6)　$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

第3章 2次関数

125　2次関数 $y=3x^2$ のグラフを次のように平行移動させると，どのような2次関数のグラフになるか。その関数の式を求めよ。→教p.81 例4

(1)　y 軸方向に 2　　(2)　x 軸方向に -3

*(3)　x 軸方向に 2，y 軸方向に -2

*(4)　x 軸方向に -2，y 軸方向に 3

(5)　x 軸方向に -1，y 軸方向に -5

126　次の2次式を平方完成せよ。→教p.82 例5

(1)　x^2+2x　　(2)　x^2-8x　　*(3)　x^2+4x+6

*(4)　x^2-6x+5　　(5)　$x^2-10x+30$　　(6)　x^2+3x

*(7)　x^2-x+2　　*(8)　x^2-5x+6　　(9)　$x^2+7x+14$

127　次の2次式を平方完成せよ。→教p.83 例6

*(1)　$3x^2-12x$　　*(2)　$2x^2+4x+1$　　(3)　$3x^2-9x+7$

(4)　$-2x^2-8x-10$　　(5)　$-x^2+3x-2$　　*(6)　$-2x^2-10x+3$

128　次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

→教p.83 例7，p.84 例題3

(1)　$y=x^2+2x-1$　　*(2)　$y=3x^2-6x-2$　　*(3)　$y=-2x^2-8x-6$

(4)　$y=3x^2+6x+3$　　(5)　$y=x^2+x-1$　　*(6)　$y=-2x^2+6x$

TRIAL B

***129**　次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+2x$　　(2)　$y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$　　(3)　$y=2x^2-3x-2$

(4)　$y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x$　　(5)　$y=(x-1)(x-4)$　　(6)　$y=(2x+1)(1-x)$

***130**　次の2つの放物線の頂点が一致するとき，定数 a，b の値を求めよ。

$$y=2x^2-4x+3,\quad y=x^2-2ax+b$$

▶ヒント　130　放物線 $y=x^2-2ax+b$ の頂点を a，b を用いて表す。2つの放物線の頂点について，x 座標，y 座標がそれぞれ等しい。

131 放物線 $y=x^2+2x-1$ を平行移動して次の放物線に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。 →教p.85 応用例題1

(1) $y=x^2-6x+12$　　*(2) $y=x^2+4x+4$

例題 18 次の問いに答えよ。

(1) 点 $(2,\ 3)$ を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 4 だけ移動したとき，移動後の点の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2+6x+11$ を，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したとき，移動後の放物線の方程式を求めよ。 →教p.88 補充問題3

考え方 (2) 平方完成して頂点の座標を求め，頂点の移動を考える。

解答

(1) 求める点の座標は

$(2+(-1),\ 3+4)$

すなわち　$\mathbf{(1,\ 7)}$　答

⇦点 $(a,\ b)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ移動すると，移動後の点の座標は　$(a+p,\ b+q)$

(2) $x^2+6x+11=(x+3)^2+2$ であるから

$y=(x+3)^2+2$

この平行移動によって，放物線 $y=x^2+6x+11$ の頂点 $(-3,\ 2)$ が移る点は

点 $(-3+1,\ 2+3)$　すなわち　点 $(-2,\ 5)$

よって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=(x+2)^2+5}$　答

⇦平行移動では 2 次の項の係数は変わらない。

注 右辺を展開した式 $y=x^2+4x+9$ を答としてもよい。

別解 求める放物線の方程式は

$y-3=(x-1)^2+6(x-1)+11$ →教p.86 研究

すなわち　$\boldsymbol{y=x^2+4x+9}$　答

132 次の点を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ移動したとき，移動後の点の座標を求めよ。

(1) $(1,\ 2)$　(2) $(-4,\ 5)$　(3) $(3,\ -1)$

***133** 放物線 $y=2x^2-4x+3$ を，次のように平行移動したとき，移動後の放物線の方程式を求めよ。 →教p.88 補充問題3

(1) x 軸方向に 1，y 軸方向に -3　(2) x 軸方向に -5，y 軸方向に 2

***134** 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したとき，移動後の放物線は $y=-2x^2+3x-1$ であった。定数 a，b，c の値を求めよ。

▶ヒント 134 逆の平行移動を考える。放物線 $y=-2x^2+3x-1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると，放物線 $y=ax^2+bx+c$ になる。

第3章 2次関数

例題 19　2 次関数 $y=x^2-6x+11$ のグラフの，x 軸，y 軸，原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

解答　$x^2-6x+11=(x-3)^2+2$ から　$y=(x-3)^2+2$

この放物線の頂点の座標は　$(3,\ 2)$

この点に対して，x 軸，y 軸，原点に関して対称な点の座標は，それぞれ

$(3,\ -2)$，$(-3,\ 2)$，$(-3,\ -2)$

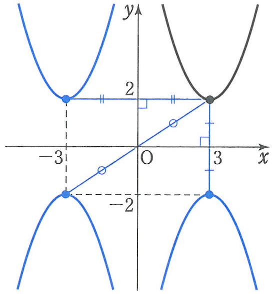
また，下に凸である放物線に対して，x 軸，原点に関して対称な放物線は上に凸である。

したがって，求める放物線の方程式は，それぞれ

$\boldsymbol{y=-(x-3)^2-2}$，$\boldsymbol{y=(x+3)^2+2}$，

$\boldsymbol{y=-(x+3)^2-2}$　答

（$y=-x^2+6x-11$，$y=x^2+6x+11$，$y=-x^2-6x-11$ でもよい）



135　2 次関数 $y=2x^2-8x+11$ のグラフの，x 軸，y 軸，原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

練習問題

値域から 1 次関数を決定

例題 20　関数 $y=ax+b$　$(1\leqq x\leqq 3)$ の値域が，$0\leqq y\leqq 1$ となるような定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。　→教p.88 補充問題 1

考え方　グラフの形（右上がりか右下がりか）に注意する。

解答　$a>0$ であるから，この関数のグラフは右上がりの直線の一部である。

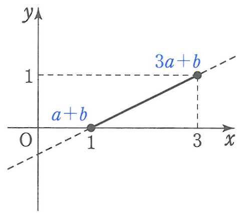
よって　$x=1$ のとき $y=0$，$x=3$ のとき $y=1$

ゆえに　$a+b=0$，$3a+b=1$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

これは $a>0$ を満たす。

したがって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{2}}$　答



136　関数 $y=ax+b$　$(-1\leqq x\leqq 1)$ の値域が，$-3\leqq y\leqq 1$ となるような定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a<0$ とする。　→教p.88 補充問題 1

137　関数 $y=ax+b$　$(-1\leqq x\leqq 2)$ の値域が，$-7\leqq y\leqq 8$ となるような定数 a，b の値を求めよ。