《第2節　実　数》

4　実　数

■実数の分類

整数と，有限小数または無限小数で表される数とを合わせて **実数** という。
実数は **有理数** と **無理数** に分けられる。

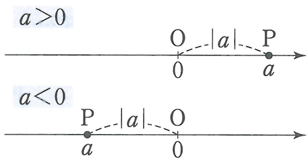
　　有理数　分数の形に表される数（整数，有限小数，循環小数）
　　無理数　分数で表すことのできない数（循環しない無限小数）

実数 {
　有理数 …… { 整数 …… 自然数，0，負の整数
　　　　　　　有限小数
　　　　　　　循環小数 }
　無理数 …… 循環しない無限小数 } 無限小数
}

■数直線と絶対値

数直線上の原点 O(0) と点 P(a) の間の距離を，a の **絶対値** といい，記号 $|a|$ で表す。
実数 a の絶対値について，次のことが成り立つ。

　　a が正の数または 0 のとき　　$|a|=a$
　　a が負の数のとき　　　　　　$|a|=-a$



TRIAL A

40　次の分数を小数で表せ。循環小数は，$0.\dot{6}$ のような表し方で書け。
→教 p.24 練習 28

(1) $\dfrac{2}{5}$　(2) $\dfrac{5}{9}$　(3) $\dfrac{2}{11}$　(4) $\dfrac{7}{8}$　(5) $\dfrac{4}{3}$　(6) $\dfrac{19}{6}$

***41**　-2，0，$\dfrac{21}{7}$，$-\dfrac{9}{8}$，$\sqrt{2}$，5，$\dfrac{2}{9}$，0.12，π，$0.\dot{8}$ の中から，次のものを選び出せ。ただし，π は円周率である。
→教 p.24，25

(1) 自然数　(2) 整数　(3) 有理数　(4) 無理数

***42**　次の中から正しいものをすべて選べ。
→教 p.26 練習 29

① 2つの自然数の和，差は常に自然数である。
② 2つの整数の和，差，積，商は常に整数である。
③ 2つの有理数の和，差，積，商は常に有理数である。
④ 2つの実数の和，差，積，商は常に実数である。

43 次の値を求めよ。ただし，π は円周率である。 →教p.27 例17，18

(1) $|5|$　　*(2) $|-1|$　　(3) $|-2.5|$

*(4) $\left|\dfrac{1}{3}\right|$　　*(5) $|-5+2|$　　*(6) $|2|-|-7|$

(7) $\left|-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right|$　　*(8) $|2-\sqrt{2}|$　　(9) $|\pi-3|+|\pi-4|$

TRIAL B

例題 7 循環小数 $2.1\dot{3}\dot{6}$ を分数で表せ。 →教p.33 Column

考え方　与えられた数を x とおく。循環する部分を消すために，$1000x-10x$ を計算する。

解答

$2.1\dot{3}\dot{6}=2.1363636\cdots\cdots$

$x=2.1363636\cdots\cdots$ とすると

$10x=21.3636\cdots\cdots$　①

$1000x=2136.3636\cdots\cdots$　②

②−① から　$1000x-10x=2115$

すなわち　$990x=2115$

したがって　$x=\dfrac{2115}{990}=\dfrac{\mathbf{47}}{\mathbf{22}}$ 答

$$\begin{array}{rr} & 1000x=2136.3636\cdots\cdots \\ -) & 10x=21.3636\cdots\cdots \\ \hline & 990x=2115 \end{array}$$

44 次の循環小数を分数で表せ。 →教p.33 Column

(1) $0.\dot{4}$　　*(2) $0.\dot{7}\dot{9}$　　(3) $0.2\dot{2}\dot{7}$　　(4) $1.\dot{3}0\dot{6}$

45 次の実数を小さい順に並べよ。ただし，π は円周率である。

$$0,\ -2,\ 5,\ \frac{8}{3},\ -\frac{9}{8},\ \sqrt{5},\ 2.7,\ \pi,\ -\sqrt{3},\ 2.\dot{3}$$

例題 8 a が次の値をとるとき，$|a-4|+|1+2a|$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) $a=5$　　(2) $a=1$　　(3) $a=-2$

解答

(1) $|5-4|+|1+2\cdot5|=|1|+|11|=1+11=\mathbf{12}$ 答

(2) $|1-4|+|1+2\cdot1|=|-3|+|3|=3+3=\mathbf{6}$ 答

(3) $|-2-4|+|1+2\cdot(-2)|=|-6|+|-3|=6+3=\mathbf{9}$ 答

46 $a=-8,\ 1,\ 4$ のそれぞれについて，次の式の値を求めよ。

(1) $|a+5|+|a-2|$　　(2) $|1-a|-|2a+7|$

5 根号を含む式の計算

平方根の性質

a が正の数のとき　$(\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})^2=a$

a が正の数または 0 のとき　$\sqrt{a^2}=a$

a が負の数のとき　$\sqrt{a^2}=-a$

$\left.\begin{matrix}\sqrt{a^2}=a \\ \sqrt{a^2}=-a\end{matrix}\right\}\ \sqrt{a^2}=|a|$

a，b が正の数のとき　$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

a，k が正の数のとき　$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

分母の有理化

分母に根号を含む式を変形して，分母に根号を含まない式にすることを，分母を **有理化** するという。

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a},\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b},\quad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

TRIAL A

*47 次の問いに答えよ。　→教p.28 例 19，20

(1) 5 の平方根は何か。　(2) 23 の平方根は何か。

(3) $\sqrt{36}$，$-\sqrt{\dfrac{25}{64}}$ の値を，それぞれ求めよ。

(4) $(\sqrt{7})^2$，$(-\sqrt{7})^2$，$\sqrt{7^2}$，$-\sqrt{7^2}$，$\sqrt{(-7)^2}$ の値を，それぞれ求めよ。

48 次の式を計算せよ。　→教p.29 例 21(1)，(2)

*(1) $\sqrt{2}\sqrt{7}$　(2) $\sqrt{3}\sqrt{11}$　(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$　*(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

49 次の式を $\sqrt{a}$ の形に表せ。　→教p.29 例 21(3)

*(1) $3\sqrt{7}$　(2) $2\sqrt{11}$　*(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(4) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

50 次の式を $k\sqrt{a}$ の形に表せ。　→教p.29 練習 37

*(1) $\sqrt{18}$　(2) $\sqrt{20}$　(3) $\sqrt{28}$　*(4) $\sqrt{75}$

51 次の式を計算せよ。　→教p.30 例 22

(1) $5\sqrt{2}-\sqrt{2}$　(2) $4\sqrt{3}-7\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{18}+\sqrt{32}$　*(4) $5\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{48}$

*(5) $(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$　*(6) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})-(\sqrt{48}-\sqrt{45})$

52 次の式を計算せよ。 →教p.30 例題6(1)

(1) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{5}$　*(2) $\sqrt{27}\times\sqrt{12}$　(3) $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{15}$

(4) $\sqrt{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$　*(5) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{6})\sqrt{6}$

(6) $(4\sqrt{2}+\sqrt{7})(3\sqrt{2}-2\sqrt{7})$　*(7) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{6})(\sqrt{3}-2\sqrt{6})$

53 次の式を計算せよ。 →教p.30 例題6(2)，(3)

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$　*(2) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$　*(4) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

(5) $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$　(6) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{2})(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})$

54 次の式の分母を有理化せよ。 →教p.31 練習40

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$　*(2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$　*(4) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

55 次の式の分母を有理化せよ。 →教p.31 例題7

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　*(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$　(5) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$　*(6) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

TRIAL B

56 次の x の値に対して，$\sqrt{(x-2)^2}$ の値をそれぞれ求めよ。 →教p.33 補充問題5

(1) $x=4$　(2) $x=2$　(3) $x=1$

57 次の計算をせよ。

*(1) $(\sqrt{54}+\sqrt{28})-(\sqrt{63}-\sqrt{96})$　(2) $(\sqrt{18}+\sqrt{24})^2$

(3) $\sqrt{5}(\sqrt{40}-\sqrt{20})$　*(4) $(\sqrt{12}-\sqrt{125})(\sqrt{48}-\sqrt{5})$

*(5) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{20}}-\dfrac{1}{\sqrt{45}}$　(6) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(7) $\dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+1}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-3}$　*(8) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$

▶ヒント　56　答は必ず0以上になることに注意する。
57　(5)～(8) まず，それぞれの項の分母を有理化する。

例題 9

$x=\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $y=\sqrt{2}-\sqrt{6}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$　　(2)　xy　　(3)　x^2+y^2　　(4)　x^3y+xy^3

発展 (5)　x^3+y^3　　→教p.33 補充問題 6

考え方　展開や因数分解の公式を利用して，$x+y$ と xy だけの式で表す。
(5)　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ から，$x^3+y^3=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}$ と考える。

解答

(1)　$x+y=(\sqrt{2}+\sqrt{6})+(\sqrt{2}-\sqrt{6})=\mathbf{2\sqrt{2}}$　答

(2)　$xy=(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2=2-6=\mathbf{-4}$　答

(3)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{2})^2-2\cdot(-4)=8+8=\mathbf{16}$　答

(4)　$x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=-4\cdot16=\mathbf{-64}$　答

(5)　$x^3+y^3=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}=2\sqrt{2}\cdot\{16-(-4)\}=\mathbf{40\sqrt{2}}$　答

別解　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2\sqrt{2})^3-3\cdot(-4)\cdot2\sqrt{2}=\mathbf{40\sqrt{2}}$　答

***58**　$x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$　　(2)　xy　　(3)　x^2+y^2　　(4)　x^3y+xy^3

発展 (5)　x^3+y^3　　(6)　$x^5y^2+x^2y^5$　　→教p.33 補充問題 6

59　$\sqrt{2}$ の値として 1.4142，$\sqrt{3}$ の値として 1.7321 を使うとき，分母の有理化を利用して，次の値を求めよ。　→教p.33 補充問題 7

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　*(2)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

例題 10

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。a と b を求めよ。

考え方　実数 x の小数の部分$=x-$(x の整数の部分)

解答

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{2}+1$　⇐分母を有理化する。

$\sqrt{2}=1.41\cdots\cdots$ であるから　$\sqrt{2}+1=2.41\cdots\cdots$

よって　$\mathbf{a=2}$,　$\mathbf{b}=(\sqrt{2}+1)-a=(\sqrt{2}+1)-2=\mathbf{\sqrt{2}-1}$　答

***60**　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。

(1)　a と b を求めよ。　　(2)　$a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

▶ヒント　59　(2), (3)　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ であることを利用する。

練習問題

3項からなる分母の有理化

例題 11　$\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

考え方　分母の $1+\sqrt{6}+\sqrt{7}$ を有理化するには，まず根号の数を減らすため，分母と分子に $(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}$ を掛ける。

解答　$\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}$

$=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$　答

61　次の問いに答えよ。

(1)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$ を計算せよ。

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

発展　2重根号

例題 12　次の式を簡単にせよ。　→数p.32 発展

(1)　$\sqrt{8+\sqrt{48}}$　　(2)　$\sqrt{5-\sqrt{21}}$

考え方　次のことを利用する。ただし，a，b は正の数とする。

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

a が b より大きいとき　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

まず，中の根号の前の係数が 2（または -2）になるように式を変形する。

解答　(1)　$\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{(6+2)+2\sqrt{6\cdot2}}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$　答

(2)　$\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{21}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7\cdot3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　⇐7 は 3 より大きい

$=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$　答

62　次の式を簡単にせよ。　→数p.32 発展

(1)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　(2)　$\sqrt{9+\sqrt{56}}$　(3)　$\sqrt{6-4\sqrt{2}}$　(4)　$\sqrt{4-\sqrt{15}}$