

第1節 式の計算

1 整式の加法と減法

■単項式と多項式

単項式 数や文字およびそれらを掛けただけで作られる式である。

数の部分を **係数**, 掛けた文字の個数を **次数** という。

多項式 単項式の和として表される式である。

多項式の1つ1つの単項式を, その多項式の **項** という。

単項式と多項式をあわせて **整式** という。整式の項の中で, 文字の部分が同じである項を **同類項** といい, 着目した文字を含まない項を **定数項** という。

■整式の整理

同類項をまとめて整理した整式において, 最も次数の高い項の次数を, その整式の **次数** という。また, 次数が n の整式を **n 次式** という。整式は次のように整理する。

① 同類項を1つの項にまとめる。

② 1つの文字に着目して, 各項を次数が低くなる順に並べて整理する。

整式を②のように整理することを, 降べきの順に整理するという。逆に, 各項を次数が高くなる順に並べて整理することを, 昇べきの順に整理するという。

■整式の加法と減法

$A+B$ …… A と B の項をすべて足して, 同類項をまとめる。

$A-B$ …… $A+(-B)$ と考え, B の各項の符号を変えたものを A に足して, 同類項をまとめる。

TRIAL A

1 次の単項式の係数と次数をいえ。また, [] 内の文字に着目したとき, その係数と次数をいえ。 → 例 p.6 例 1, 2

* (1) $3ax^2$ [x]

(2) by [y]

(3) $-2ay$ [a]

* (4) $-xy^3$ [y]

(5) $3ax^2y$ [x と y]

* (6) $-5abx^2y^3$ [a と b]

2 次の整式の同類項をまとめよ。また, その整式の次数をいえ。 → 例 p.7 例 3

(1) $8x-1+5x-10x+4$

(2) $3x^2+x-1+2x-x^2+7$

(3) $2x^3-x+6x^2+4x^3-3x^2-5+3x$

* (4) $5x^2-3+3x+2-5x^2-6x$

* (5) $2-5x^2+x^4+3x^2-2x^4+1$

(6) $a^2-4ab+4b^2+6ab-3b^2+a^2$

3 次の整式は, [] 内の文字に着目すると何次式か。また, そのときの定数項は何か。 → 例 p.8 例 4

* (1) ax^3+bx^2+cx+d [x]

(2) $a^2+3ab-b$ [a]

(3) $2x^2-3xy+y^2-y$ [y]

* (4) $ax^2+3bxy+cy^2+2$ [x]

4 次の整式を、 x について降べきの順に整理せよ。 → 例 p.8 例 5

(1) $5x - 4x^2 - 2 + 5x^3$ *(2) $4x^2 - 5 + 2x^3 - 2x - x^2 - x^3 + 3$
 (3) $2a^2x + a^2x^2 - 3x^2 - 5x + 1$ *(4) $6x^2 - 7xy + 2y^2 - 6x + 5y - 12$

5 次の整式 A と B について、 $A+B$ と $A-B$ を計算せよ。 → 例 p.9 例 6

(1) $A=3x-4y-2z$, $B=-x-4y+2z$
 *(2) $A=x^3-3-2x$, $B=-5x+2x^2-3x^3-1$
 *(3) $A=2a^2-ab+5b^2$, $B=-3a^2+5ab-b^2$
 (4) $A=2x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$, $B=2x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

6 $A=2x^2-3x+1$, $B=x^2+2x-4$ とする。次の式を計算せよ。 → 例 p.9 例 7

(1) $A+3B$ (2) $2A-B$ *(3) $3A-2B$

TRIAL B

7 次の整式を、 x について降べきの順に整理せよ。また、昇べきの順に整理せよ。

(1) $5x^2-3x^3-6x^2+2x+7-7x$ (2) $-3xy-7x-2xy+y+9x^2-4$

*8 次の式を計算せよ。

(1) $4(x^3+3x-2)-2(4x-5-3x^2)+(4+3x-5x^2)$
 (2) $2(2a^3-5a+10)+3(a-4-a^2)-(3a^2-4a+7)$

例題 1

$A=x-y+2z$, $B=2x-y+z$, $C=x+2y-z$ とする。

$3(A+B)-2(A+2C)$ を計算せよ。 → 例 p.23 補充問題 1

考え方 はじめから A , B , C に代入するのではなく、与えられた式を整理してから代入する。

解答

$$\begin{aligned} 3(A+B)-2(A+2C) &= 3A+3B-2A-4C \\ &= A+3B-4C \\ &= (x-y+2z)+3(2x-y+z)-4(x+2y-z) \\ &= x-y+2z+6x-3y+3z-4x-8y+4z \\ &= (1+6-4)x+(-1-3-8)y+(2+3+4)z \\ &= 3x-12y+9z \quad \text{答} \end{aligned}$$

*9 $A=2x+y+3z$, $B=x+2y+z$, $C=x+y+2z$ とする。次の式を計算せよ。

→ 例 p.23 補充問題 1

(1) $2A-(B+2C)$ (2) $A+C-\{2A-(B+C)\}$

2 整式の乗法

指数法則

m, n は正の整数とする。

$$1 \ a^m \times a^n = a^{m+n} \quad 2 \ (a^m)^n = a^{mn} \quad 3 \ (ab)^n = a^n b^n$$

分配法則

整式 A, B, C について

$$A(B+C) = AB+AC, \quad (A+B)C = AC+BC$$

展開の公式

$$1 \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$2 \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$3 \ (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$4 \ (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

TRIAL A

10 次の式を計算せよ。

→ 例 p.10 例 8

$$\begin{array}{lll} (1) \ a^4 \times a^2 & *(2) \ 3x^2 \times (-4x^3) & (3) \ 3x^2y \times 5xy^3 \\ (4) \ (a^2)^4 & (5) \ (-x^3)^2 & *(6) \ (-4a^2b^2)^3 \\ (7) \ -x^4y^2 \times (-x)^3y & *(8) \ 2ab^2 \times (-3a^2b)^3 & *(9) \ (abc)^2 \times (-3ab^3c) \end{array}$$

11 次の式を展開せよ。

→ 例 p.11 例 9

$$\begin{array}{ll} (1) \ x^2(3x^2-4x+2) & (2) \ (a^2+5a-3) \times (-2a) \\ *(3) \ (-2x) \times (2x^2-3xy-y^2) & *(4) \ \left(\frac{a^2}{3} - \frac{ab}{6} - \frac{b^2}{4}\right) \times 12b^2 \end{array}$$

12 次の式を展開せよ。

→ 例 p.11 例 10

$$\begin{array}{ll} (1) \ (3x^2-4)(2x+5) & (2) \ (4x-1)(x^2-5) \\ *(3) \ (x-1)(x^2+2x-3) & (4) \ (a^2-2a-2)(a+3) \\ *(5) \ (x^2-2xy-y^2)(x-3y) & (6) \ (a+2b)(a^2+3ab-2b^2) \end{array}$$

13 次の式を展開せよ。

→ 例 p.12 例 11(1)~(3)

$$\begin{array}{lll} (1) \ (x+4)^2 & (2) \ (4a+3)^2 & (3) \ (3x-1)^2 \\ *(4) \ (a+7b)^2 & *(5) \ (2x-5y)^2 & *(6) \ (a+3)(a-3) \\ (7) \ (x-10)(x+10) & (8) \ (6a+b)(6a-b) & *(9) \ (5x-2y)(5x+2y) \end{array}$$

14 次の式を展開せよ。

→ 図 p.12 例 11(4), (5)

(1) $(x+1)(x+2)$

*(2) $(x-4)(x+2)$

(3) $(x+5)(x-1)$

*(4) $(a-2)(a-3)$

*(5) $(x+7a)(x+a)$

(6) $(a+4b)(a-3b)$

(7) $(a-b)(a+2b)$

(8) $(x-2y)(x-13y)$

15 次の式を展開せよ。

→ 図 p.13 例 12

(1) $(x+2)(3x+1)$

(2) $(2a+3)(4a-1)$

(3) $(3x-2)(4x+3)$

(4) $(4a-3)(a-2)$

*(5) $(x+4y)(2x+3y)$

*(6) $(2a-b)(3a-2b)$

*(7) $(5x-y)(4x+3y)$

(8) $(8x+9a)(3x-4a)$

16 次の式を展開せよ。

→ 図 p.13 例 13

(1) $(a+2b+3)(a+2b-3)$

*(2) $(3x-2y-1)(3x-2y+1)$

(3) $(a-b+4)(a-b+2)$

(4) $(2x+3y-3)(2x+3y+6)$

17 次の式を展開せよ。

→ 図 p.14 例題 1

(1) $(a-b+c)^2$

*(2) $(x+y-z)^2$

*(3) $(a-2b-3c)^2$

(4) $(2x-3y+z)^2$

18 次の式を展開せよ。

→ 図 p.14 例題 2

(1) $(x-3)^2(x+3)^2$

*(2) $(a+2b)^2(a-2b)^2$

(3) $(3x-y)^2(3x+y)^2$

*(4) $(a-2)(a^2+4)(a+2)$

(5) $(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$

(6) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$

TRIAL B

19 次の式を展開せよ。

(1) $\left(3a - \frac{1}{2}b\right)^2$

*(2) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}y\right)\left(\frac{5}{4}y + \frac{2}{3}x\right)$

*(3) $(y^2+3)(y^2-2)$

*(4) $(2xy+3)(5xy-4)$

(5) $(a^2+2a+2)(a^2+2a-2)$

*(6) $(x^2-x-1)(x^2-x-3)$

20 次の式を展開せよ。

$$(1) 2x(x^2+x+5)+4(1-4x-x^2)-x(5x-4+3x^2)$$

$$*(2) (2x+3y+1)(x-y+3)$$

$$*(3) (3x-2x^2-4)(x^2+5-3x)$$

21 次の式を展開し、 x について降べきの順に整理せよ。

$$*(1) (2x+a-1)^2$$

$$(2) (ax-2a-2)(3-x)$$

22 次の式を展開したときの、 x^3 の係数を求めよ。

$$(x^2+x+3)(-x^2+3x-1)$$

23 次の式を展開せよ。

$$(1) (a^2-2bc)(bc+3a^2)$$

$$(2) (m^2-2m-1)^2$$

$$*(3) (x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$$

$$*(4) (a+b-c-d)(a-b-c+d)$$

$$(5) (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$*(6) (k+2)(k-1)(k^2-k+2)$$

$$(7) (3x-y+1)(2x+y-1)$$

$$(8) (2a-2b+c)(a-b-c)$$

例題

2

次の式を展開せよ。

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

解答

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= (x-1)(x-4) \times (x-2)(x-3) \\ &= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) \\ &= \{(x^2-5x)+4\} \{(x^2-5x)+6\} \\ &= (x^2-5x)^2 + 10(x^2-5x) + 24 \\ &= (x^4-10x^3+25x^2) + 10x^2-50x+24 \\ &= x^4-10x^3+35x^2-50x+24 \quad \text{答} \end{aligned}$$

← 掛ける組み合わせを工夫する。

24 次の式を展開せよ。

$$(1) x(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$*(2) (x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$(3) (x-2)(x+5)(x-5)(x+2)$$

▶ ヒント 22 展開して積が $\square x^3$ になる項について、その和を求める。

23 (4) $\{(\dots) + (\dots) \} \{ (\dots) - (\dots) \}$ の形になる。

3 因数分解

■ 因数分解の公式

- 0 $AB+AC=A(B+C)$
- 1 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- 2 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
- 3 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
- 4 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

■ 因数分解の要領

- ① 共通な因数があればくり出す。
- ② 因数分解の公式が利用できるように式を整理する。
 - ・ 適当なおき換えをしたり, 項の組み合わせを考える。
 - ・ 次数の最も低い文字について, 降べきの順に式を整理する。
- ③ 因数分解の公式を利用する。

TRIAL A

25 次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.15 例 14

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| (1) $ab-3bc$ | (2) $6a^2b+3ab^2$ |
| * (3) $2x^3+2x^2y-6x^2$ | * (4) $4xy^2-12x^2y+8xy$ |

26 次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.15 例題 3

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| * (1) $(a-1)x-(a-1)$ | (2) $x(x+1)+(x+1)$ |
| * (3) $a(x-y)-2(y-x)$ | (4) $2c(a-3b)+(3b-a)d$ |

27 次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.16 例 15

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| (1) x^2+6x+9 | * (2) $x^2-8x+16$ | (3) $4-4a+a^2$ |
| (4) $x^2+4xy+4y^2$ | * (5) $9x^2+12xy+4y^2$ | * (6) $a^2-10ab+25b^2$ |
| (7) $16x^2-24xy+9y^2$ | (8) x^2-81 | (9) $9x^2-16$ |
| * (10) $4x^2-25y^2$ | (11) $64a^2-b^2$ | (12) $36x^2y^2-49$ |

28 次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.16 例 16

- | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------|
| (1) $x^2+7x+12$ | * (2) $x^2-12x+35$ | (3) $a^2+7a-18$ |
| * (4) $x^2-3x-18$ | * (5) y^2-9y+8 | (6) $y^2-6y-27$ |
| (7) $t^2+10t+16$ | (8) $x^2-11x+30$ | (9) $y^2+7y-44$ |

29 次の式を因数分解せよ。

→ 図p.17 例題4

$$\begin{array}{lll}
 *(1) & x^2+8xy+15y^2 & (2) \quad x^2-9xy+8y^2 & *(3) \quad x^2-2xy-24y^2 \\
 *(4) & x^2+12ax+20a^2 & (5) \quad x^2-5ax-36a^2 & *(6) \quad x^2+8ax-48a^2 \\
 (7) & a^2+11ab+18b^2 & (8) \quad a^2+ab-20b^2 & (9) \quad a^2-13ab+42b^2
 \end{array}$$

30 次の式を因数分解せよ。

→ 図p.18 例題5

$$\begin{array}{lll}
 *(1) & 3x^2+5x+2 & (2) \quad 2x^2+7x+3 & (3) \quad 3x^2-7x+2 \\
 *(4) & 6x^2+x-1 & (5) \quad 8y^2+14y-15 & (6) \quad 6y^2-5y-4 \\
 *(7) & 2x^2-7ax+6a^2 & (8) \quad 3x^2-11ax-4a^2 & (9) \quad 5x^2+7xy-6y^2 \\
 *(10) & 12x^2-7xy-12y^2 & (11) \quad 6a^2+17ab+12b^2 & *(12) \quad 12a^2-23ab+10b^2
 \end{array}$$

TRIAL B

31 次の式を因数分解せよ。

→ 図p.18 応用例題1

$$\begin{array}{ll}
 (1) & (x+y)^2-6(x+y)+8 \\
 *(2) & 2(a-b)^2-3(a-b)+1 \\
 *(3) & (x-y-1)^2-6(x-y-1)+9 \\
 (4) & 4(a+b+1)^2-5(a+b+1)-6
 \end{array}$$

32 次の式を因数分解せよ。

→ 図p.19 応用例題2

$$\begin{array}{ll}
 *(1) & x^4-7x^2-18 \\
 *(2) & x^4-256 \\
 (3) & 81x^4-18x^2+1 \\
 (4) & 4x^4-13x^2+9 \\
 *(5) & (x^2+3x)^2-6(x^2+3x)-16 \\
 (6) & (x^2-x)^2-22(x^2-x)+40
 \end{array}$$

33 次の式を因数分解せよ。

→ 図p.19 応用例題3

$$\begin{array}{ll}
 (1) & x^2+2xy-5x-6y+6 \\
 *(2) & x^2-8a+2ax-16 \\
 (3) & 4-4y+2xy-x^2 \\
 (4) & a^2b+a-b-1 \\
 *(5) & a^2+b^2+bc-ca-2ab \\
 *(6) & 4x^2y-4x^2z+y^2z-y^3
 \end{array}$$

34 次の式を因数分解せよ。

→ 図p.20 応用例題4

$$\begin{array}{ll}
 *(1) & x^2+(5y+1)x+(2y-1)(3y+2) \\
 (2) & x^2-(a+5)x-(2a^2-a-6) \\
 (3) & 2x^2+xy-y^2-3x+1 \\
 *(4) & 6x^2-7xy+2y^2-6x+5y-12
 \end{array}$$

例題
3

次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.23 補充問題 4

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$

考え方 a, b, c のどの文字についても2次式である。そこで、たとえば a について降べきの順に整理する。共通な因数でくれない場合は、因数分解の公式を利用する。

解答

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ &= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + (b^2c - c^2b) && \leftarrow a \text{ について整理} \\ &= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} && \leftarrow \text{共通な因数でくくる} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a) \quad \text{答} \end{aligned}$$

35 次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.23 補充問題 4

- (1) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$
 (2) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc$

発展 3次式の展開と因数分解

例題
4

次の式を展開せよ。

→ 図 p.21, 22 発展

- (1) $(x+3)^3$ (2) $(x-2)(x^2+2x+4)$

考え方 次の展開の公式を用いる。

$$5 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$6 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

解答

- (1) $(x+3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3$
 $= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \quad \text{答}$
 (2) $(x-2)(x^2+2x+4) = (x-2)(x^2+x \cdot 2+2^2) = x^3 - 2^3$
 $= x^3 - 8 \quad \text{答}$

36 次の式を展開せよ。

→ 図 p.21, 22 発展

- (1) $(a-2)^3$ (2) $(3x+1)^3$
 (3) $(2x+3y)^3$ (4) $(4a-3b)^3$
 (5) $(x+3)(x^2-3x+9)$ (6) $(a-1)(a^2+a+1)$
 (7) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$ (8) $(3x-5y)(9x^2+15xy+25y^2)$

例題 5 次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.22 発展

(1) x^3+8 (2) $27a^3-x^3$

考え方 次の因数分解の公式を用いる。

$$5 \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

解答

(1) $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x \cdot 2+2^2)$
 $= (x+2)(x^2-2x+4)$ **答**

(2) $27a^3-x^3=(3a)^3-x^3=(3a-x)\{(3a)^2+3a \cdot x+x^2\}$
 $= (3a-x)(9a^2+3ax+x^2)$ **答**

37 次の式を因数分解せよ。

→ 図 p.22 発展

(1) x^3-64 (2) $8a^3+27$
 (3) $64a^3-b^3$ (4) $125x^3+8y^3$

練習問題

展開して項を組み合わせる因数分解

例題 6 次の式を因数分解せよ。

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$$

解答

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24 \\ &= (x+1)(x+4) \times (x+2)(x+3)-24 = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24 \\ &= \{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}-24 = (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24 \\ &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x) = (x^2+5x)\{(x^2+5x)+10\} \\ &= x(x+5)(x^2+5x+10) \quad \text{答} \end{aligned}$$

38 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$ (2) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$

発展 39 次の式を因数分解せよ。

(1) $16x^4y+2xy^4$ (2) x^6-y^6
 (3) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$