(1)　左辺－右辺＞０となることを確認する問題

$$
\begin{aligned}
& a(a-1)-b(b-1) \\
&= a^2-a-b^2+b \\
&= a^2-b^2-a+b \\
&= (a+b)(a-b)-(a-b) \\
&= (a-b)(a+b-1) \\
&= (a-b)\left(a+b-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) \\
&= (a-b)\left(a-\frac{1}{2}+b-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$a>b>\dfrac{1}{2}$　だから、

$a-b>0$, $a-\dfrac{1}{2}>0$, $b-\dfrac{1}{2}>0$

よって、与式＞０　　　（『**与式**』とは、一番はじめに立てた式を指す）

$a(a-1)-b(b-1)$

以上より、

$a(a-1)>b(b-1)$　は成立する。

(2)　左辺－右辺≧０となることを確認する問題

$$
\begin{aligned}
& a^3+8b^3-2ab(a+2b) \\
&= a^3+(2b)^3-2ab(a+2b) \\
&= (a+2b)(a^2-2ab+4b^2)-2ab(a+2b) \\
&= (a+2b)(a^2-2ab+4b^2-2ab) \\
&= (a+2b)(a^2-4ab+4b^2) \\
&= (a+2b)(a-2b)^2
\end{aligned}
$$

３乗の因数分解公式

$a>0$, $b>0$　だから、$a+2b>0$

また、$(a-2b)^2 \geqq 0$　である。

よって、与式≧０

以上より、

$a^3+8b^3 \geqq 2ab(a+2b)$　は成立する。