リンク数学演習　ⅠA＋ⅡB 類題演習　41

この問題はクリアー数ⅡBより出題しています　全てやり、答え合わせまでして提出すること　（　）組（　）番　名前（　）　提出確認印

[クリアー数学B　問題216]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2$

初項 3、公差 2 の等比数列であるから

$a_n = 3+(n-1)\cdot 2$

$= 2n+1$ //

(2) $a_1=5,\ a_{n+1}=-3a_n$

初項 5、公比 -3 の等比数列

$a_n = 5\cdot(-3)^{n-1}$ //

[階差数列.]　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$　$(b_k = a_{k+1}-a_k.)$

⇓

[クリアー数学B　問題217]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+(-2)^n$

初項 3、公差 $(-2)^n$ の階差数列である。

$n \geq 2$ のとき.

$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k$

$= 3 + \dfrac{-2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$

$= 3 + \dfrac{-2-(-2)^n}{3}$

$= \dfrac{7-(-2)^n}{3}$

$n=1$ のとき.

$a_1 = \dfrac{7-(-2)^1}{3}$

$= \dfrac{9}{3} = 3.$

よって、$n \geq 1$ において.

$a_n = \dfrac{7-(-2)^n}{3}.$ //

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+4n+3$

初項 2、公差 $4n+3$ の階差数列.

$n \geq 2$ のとき.

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)$

$= 2 + 4\cdot\dfrac{(n-1)\cdot n}{2} + 3(n-1)$

$= 2 + 2n^2 - 2n + 3n - 3$

$= 2n^2 + n - 1.$

$n=1$ のとき.

$a_1 = 2+1-1 = 2.$

よって、$n \geq 1$ において.

$a_n = 2n^2+n-1.$ //

[階差数列の見極め方]

$a_{n+1}-a_n$ が n で表わされる.

(1). $a_{n+1}-a_n = (-2)^n$

(2) $a_{n+1}-a_n = 4n+3.$

注意

はじめは「$n \geq 2$ のとき」とつける.

その後「$n=1$ のとき」

すなわち a_1 を求める。

題の a_1 と一致すれば OK.

[クリアー数学B　問題218]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

漸化式

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=\boxed{3}a_n-2$

(特性方程式)

$x = 3x-2.$

$-2x = -2.$

$x = 1$

$a_{n+1} - 1 = \boxed{3}(a_n - 1)$

$\{a_n-1\}$ は 初項 $a_1-1 = 2-1 = 1.$

公比 3 の等比数列

$a_n - 1 = 1\cdot 3^{n-1}$

$= 3^{n-1}$　　$a_n = 3^{n-1}+1.$ //

特性方程式

$a_{n+1},\ a_n$ ともに x とおき.

方程式を解く。 $x=\alpha.$

漸化式

$a_{n+1}-\alpha = \beta(a_n-\alpha)$

a_n の係数.

$\underbrace{(a_n-\alpha)}_{b_n}$ の β 倍 が $\underbrace{(a_{n+1}-\alpha)}_{b_{n+1}}$

$b_n = a_n - \alpha$ とおいて

考えてもよい. $(b_{n+1} = \beta b_n)$

☆ 漸化式は等比数列で表わされる

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}-2$

$x = \frac{1}{3}x - 2.$

$\frac{2}{3}x = -2$

$x = -3.$

特性方程式

$a_{n+1}+3 = \frac{1}{3}(a_n+3)$ ← 漸化式

$\{a_n+3\}$ は 初項 $a_1+3 = 1+3 = 4.$

公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列.

$a_n + 3 = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$ ← 一般項表記 (等比)

$= \dfrac{4}{3^{n-1}}$　　$a_n = \dfrac{4}{3^{n-1}} - 3.$ //

[クリアー数学B　問題219]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1,\ a_{n+1}=5a_n+2$ によって定められている。

(1) $a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$ を導け。

$a_{n+1} = 5a_n + 2$ 　―①　より

$a_{n+2} = 5a_{n+1} + 2$ 　―②

②−① より.

$a_{n+2} = 5a_{n+1} + 2$

$-)\ a_{n+1} = 5a_n + 2$

$a_{n+2} - a_{n+1} = 5(a_{n+1} - a_n).$

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とする。数列 $\{b_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$b_n = a_{n+1} - a_n$ より.

$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}.$

$a_1 = 1$ より

$a_2 = 5a_1 + 2 = 5+2 = 7$

(1) より.

$b_{n+1} = 5b_n.$

$\{b_n\}$ は. 初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 7-1 = 6$

公比 5 の等比数列.

$b_n = 6\cdot 5^{n-1}$ //

$a_{n+1} - a_n = b_n = 6\cdot 5^{n-1}.$

$\{a_n\}$ は. 初項 $a_1 = 1.$

公差 $6\cdot 5^{n-1}$ の階差数列.

$n \geq 2$ のとき.

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6\cdot 5^{k-1}.$

$= 1 + 6\cdot\dfrac{5^{n-1}-1}{5-1}$

$= 1 + 6\cdot\dfrac{5^{n-1}-1}{4}$

$= 1 + \dfrac{3\cdot 5^{n-1}-3}{2}$

$= \dfrac{3\cdot 5^{n-1}-1}{2}.$

$n=1$ のとき

$a_1 = \dfrac{3\cdot 1 - 1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1.$

$n \geq 1$ で. $a_n = \dfrac{3\cdot 5^{n-1}-1}{2}.$ //

リンク数学演習　ⅠA＋ⅡB　類題演習　42

この問題はクリアー数ⅡBより出題しています　全てやり、答え合わせまでして提出すること　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)　提出確認印

[クリアー数学B　問題220]

$a_1=-1$, $2a_{n+1}+a_n=1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$2x+x=1.$

$3x=1.$

$x=\frac{1}{3}$

$2a_{n+1}+a_n=1.$ より.

$2a_{n+1}=-a_n+1.$

$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}.$

$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

$\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は. 初項 $a_1-\frac{1}{3}=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$.

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列.

$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}.$ //

[クリアー数学B　問題230]

n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

(1) $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n\boxed{(3n-1)}$　―(*)

(i) $n=1$ のとき.

左辺 = 1.

右辺 $=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(3-1)=\frac{1}{2}\times2=1.$

よって. (*) は成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると,

$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$　―①

$n=k+1$ のときは. ① より

①代入

$1+4+7+\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\}$

$=\frac{1}{2}k(3k-1)+(3k+1)$

$=\frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2}$

$=\frac{3k^2-k+6k+2}{2}=\frac{3k^2+5k+2}{2}$

$=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$

$=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}.$

$\boxed{3n-1}$ n=k+1 を代入した形へ変形

よって. $n=k+1$ のときも (*) は成り立つ.

(i)(ii) より.

すべての自然数 n において (*) は成り立つ。

$\begin{array}{r} 3\ \ 2\ \ 5 \\ \times\ 1\ \ \ 3 \\ 3\ \ \ 2\ \ \ 2 \end{array}$

(2) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$　―(*)

(i) $n=1$ のとき.

左辺 $=1\cdot3=3.$

右辺 $=\frac{1}{6}\times1\times2\times9=3.$

よって. (*) は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき. (*) が成り立つと仮定すると.

$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+k(2k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$　―①

$n=k+1$ のとき. ① より.

①代入

$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+k(2k+1)+(k+1)\{2(k+1)+1\}$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)(2k+3)$

$=\frac{k(k+1)(4k+5)+6(k+1)(2k+3)}{6}$

$=\frac{(k+1)\{k(4k+5)+6(2k+3)\}}{6}$

$=\frac{(k+1)(4k^2+5k+12k+18)}{6}$

$=\frac{(k+1)(4k^2+17k+18)}{6}$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9)$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}.$

$\begin{array}{r} 4\ \ 18\ \ 17 \\ 1\ \ \ 2\ \ \ 8 \\ 4\ \times\ 9\ \ \ 9 \end{array}$

よって. $n=k+1$ のときも (*) は成り立つ.

(i)(ii) より

すべての自然数 n において.

(*) は成り立つ。

[クリアー数学B　問題232]

n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次のことを証明せよ。

(1) $5^n>4n$　―(*)

(i) $n=1$ のとき.

左辺 = 5

右辺 = 4.

よって (*) は成り立つ.

同じ値

(ii) $n=k$ $(k\geqq1)$ のとき. (*) は成り立つと仮定すると.

$5^k>4k$　―①

$n=k+1$ のとき. ① より.

n=k+1 の 左辺 − 右辺

$5^{k+1}-4(k+1)=5\cdot5^k-4k-4$　①代入

5×5^k

$>5\cdot4k-4k-4$

ここに注意

$=4\cdot4k-4$

$=4(4k-1)>0.$

k≧1 より. 4k−1 > 0

ゆえに. $5^{k+1}>4(k+1)$

よって $n=k+1$ のときも (*) は成り立つ.

(i)(ii) より.

すべての自然数 n において (*) は成り立つ。

(2) $n\geqq3$ のとき　$3^n>5n+1$　―(*)

(i) $n=3$ のとき.

左辺 $=3^3=27.$

右辺 $=5\cdot3+1=16$

よって. (*) は成り立つ.

(ii) $n=k$ $(k\geqq3)$ のとき. (*) は成り立つと仮定すると,

$3^k>5k+1.$　―①

$n=k+1$ のとき. ① より.

$3^{k+1}-\{5(k+1)+1\}=3\cdot3^k-(5k+6)$　①代入

$>3\cdot(5k+1)-5k-6$

$=3\cdot5k+3-5k-6$

$=2\cdot5k-3$

$=10k-3>0.$

ゆえに. $3^{k+1}>5(k+1)+1.$

よって. (*) は成り立つ。

(i)(ii) より.

$n\geqq3$ において. (*) は成り立つ.

(3) $n\geqq4$ のとき　$2^{n+1}>n^2+3n$　―(*)

(i) $n=4$ のとき.

左辺 $=2^{4+1}=2^5=32.$

右辺 $=4^2+3\times4=16+12=28$

よって (*) は成り立つ。

(ii) $n=k$ $(k\geqq4)$ のとき. (*) は成り立つと仮定すると,

$2^{k+1}>k^2+3k$　―①

$n=k+1$ のとき. ① より.

$2^{k+2}-\{(k+1)^2+3(k+1)\}=2\cdot2^{k+1}-(k^2+2k+1+3k+3)$　①代入

$>2(k^2+3k)-(k^2+5k+4)$

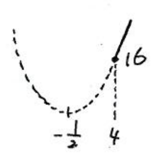
$=2k^2+6k-k^2-5k-4$

$=k^2+k-4$

$=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-4$

平方完成.

$=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$



$k=4$ のとき. $\left(4+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{4}=\left(\frac{9}{2}\right)^2-\frac{17}{4}=\frac{81}{4}-\frac{17}{4}=\frac{64}{4}=16>0.$

$k\geqq4$ で $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{4}>0.$　ゆえに $2^{k+2}>(k+1)^2+3(k+1).$

よって. $n=k+1$ のとき. (*) は成り立つ。

(i)(ii) より.

$n\geqq4$ のすべての自然数で. (*) は成り立つ。